Haladvány Kiadvány 2012.06.20

Két kurtított algó harmadfokúakra

Hujter Mihály

.

Előbb két speciális harmadfokú polinom faktorizációjával foglalkozunk, majd az általánosakéval. Érdekesség, hogy nem használunk komplex számokat, mégis az összes valós harmadfokú polinomegyenletet meg tudjuk oldani. Egy érdekes geometriai kapcsolatot is felmutatunk olyan valós harmadfokúakra, melyeknek a gyökei mind valósak: ilyeneket megoldani egy adott méretű szabályos háromszög ügyes elhelyezésével lehet a koordinátarendszerben. Végül egy szemrevaló „szemüveg”-táblázatot is közlünk.

1.Tétel. Tetszőleges adott valós k-ra és minden x-re fennáll

$$x^3 + 3x - 54k = (x - x_1)\left(x^2 + x_1 x + x_1^2 - 3\right)$$

ahol

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{3^6k^2+1} + 3^3k} - \sqrt[3]{\sqrt{3^6k^2+1} - 3^3k}$$

Megemlítjük, hogy a fenti képletben a második köbgyök az elsőnek éppen a reciproka.

2.Tétel. Ha ℓ adott valós szám, melyre $|\ell| \le 1$, akkor minden x-re fennáll

$$x^3 - 3x - 2\ell = (x - x_1)\left(x^2 + x_1 x + x_1^2 - 3\right)$$

ahol

$$x_1 = 2\cos\frac{\arccos \ell}{3}$$

Először a 2. tételt bizonyítjuk. Felhasználjuk az ismert

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

azonosságot. Ebből átrendezéssel ezt kapjuk:

$$(2\cos\varphi)^3 - 3(2\cos\varphi) - 2\cos 3\varphi = 0$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\varphi = \frac{\arccos\ell}{3}$$

választással $x_1 = 2\cos\varphi$ gyöke lesz a $x^3 - 3x - 2\ell$ polinomnak. Algebrai alapismereteinkből tudjuk, hogy ekkor az $x^3 - 3x - 2\ell$ polinom faktorizálható $(x - x_1)\left(x^2 + mx + n\right)$ alakban valamely alkalmas valós m, n számokra. Mivel az

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x - 2\ell - (x - x_1)\left(x^2 + mx + n\right) \\ = \quad & (x_1 - m)\,x^2 + (mx_1 - n - 3)\,x + (nx_1 - 2\ell) \end{aligned}$$

polinom azonosan nulla, ezért $m = x_1$ és

$$n = \frac{2\ell}{x_1} = \frac{2\cos 3\varphi}{2\cos\varphi} = 4\cos^2\beta - 3 = x_1^2 - 3$$

Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük. Az első tételt pedig a későbbiekben általánosabb formájában bizonyítjuk majd.

Valós s és t számokra, ha $t \geq -\sqrt[3]{s^2}$, tekinsük az

$$x_1 = \sqrt[3]{s - \sqrt{t^3 + s^2}} + \sqrt[3]{s + \sqrt{t^3 + s^2}}$$

számot. Keresni fogunk hozzá egy olyan harmadfokú valós polinomot, melynek ez az egyik valós megoldása. A kényelmesebb jelölések érdekében legyen

$$\rho = \sqrt[3]{\sqrt{t^3 + s^2} - s}, \qquad r = \sqrt[3]{\sqrt{t^3 + s^2} + s}$$

Nyilván

$$x_1 = r - \rho, \qquad \rho r = t, \qquad r^3 - \rho^3 = 2s$$

Most felhasználva az

$$(r - \rho)^3 = r^3 - \rho^3 - 3(r - \rho)r\rho$$

azonosságot azt kapjuk, hogy $x_1^3 = 2s - 3x_1 t$. Ebből már látható, hogy x_1 gyöke a $x^3 + 3tx - 2s$ polinomnak.

Nyertünk tehát egy módszert az $x^3 + bx + c$ alakú valós együtthatós polinomok egyik gyökének megkeresésére, ha $2^2 b^3 \geq -3^3 c^2$. A fentiek alapján az egyik gyök:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^3}{3^3} + \frac{c^2}{2^2}} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^3}{3^3} + \frac{c^2}{2^2}} - \frac{c}{2}}$$

Most rátérünk az 1. tétel bizonyítására. Esetünkben $b = 3$ és $c = -54k$. Tehát

$$x_1 = \sqrt[3]{\sqrt{1 + (27k)^2} + 27k} \; - \sqrt[3]{\sqrt{1 + (27k)^2} - 27k}$$

valóban gyöke a $x^3 + 3x - 54k$ polinomnak, és így felírhatjuk, hogy

$$x^3 + 3x - 54k = (x - x_1)\left(x^2 + mx + n\right)$$

Mivel a két oldal különbsége, azaz

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x - 54k - (x - x_1)\left(x^2 + mx + n\right) \\ = \quad & (x_1 - m)\, x^2 + (mx_1 - n + 3)\, x + nx_1 - 54k \end{aligned}$$

azonosan nulla polinom, ezért $m = x_1$ és $n = x_1^2 - 3$. Ezzel az 1. tétel bizonyítását is befejeztük.

Most legyen q egy tetszőleges valós szám. Keressünk egy harmadfokú polinomot, melynek az egyik valós gyöke

$$\sqrt[3]{s - \sqrt{t^3 + s^2}} + \sqrt[3]{s + \sqrt{t^3 + s^2}} - q$$

A fentiek alapján ez a polinom nem lesz más, mint

$$(x + q)^3 + 3t(x + q) - 2s = x^3 + 3qx^2 + 3\left(q^2 + t\right) x + q^3 + 3tq - 2s$$

Ha tehát keressük az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom egyik valós gyökét, akkor olyan s, t, q valós számokra akarunk bukkanni, melyekre

$$3q = a, \qquad 3\left(q^2 + t\right) = b, \qquad q^3 + 3tq - 2s = c$$

Azaz

$$q = \frac{a}{3}, \qquad s = \frac{ab}{6} - \frac{a^3}{3^3} - \frac{c}{2}, \qquad t = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{3^2}$$

Ha ezeket a q, s, t értékeket beírjuk a

$$\sqrt[3]{s - \sqrt{t^3 + s^2}} + \sqrt[3]{s + \sqrt{t^3 + s^2}} - q$$

képletbe, akkor megkapjuk a $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom egyik valós gyöket.

Nézzünk egy példát: $x^3 + x^2 + x - \frac{1}{9}$. Először megoldjuk a

$$3q = 1, \qquad 3\left(q^2 + t\right) = 1, \qquad q^3 + 3tq - 2s = \frac{-1}{9}$$

egyenletrendszert, és megkapjuk, hogy

$$q = \frac{1}{3}, \qquad s = \frac{5}{3^3}, \qquad t = \frac{2}{3^2}$$

Tehát

$$t^3+s^2=\left(\frac{2}{3^2}\right)^3+\left(\frac{5}{3^3}\right)^2=\frac{11}{3^5}=\frac{33}{3^3}$$

továbbá

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{5}{3^3}-\frac{\sqrt{33}}{3^3}}+\sqrt[3]{\frac{5}{3^3}+\frac{\sqrt{33}}{3^3}}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{33}+5}-\sqrt[3]{\sqrt{33}-5}-1}{3}$$

Nézzünk egy másik próbát is! Tekintjük az

$$(1+x+x^2)(x-4)=x^3-3x^2-3x-4$$

főpolinomot, és megnézzük, hogy a fenti módszerrel megkapjuk-e az egyetlen valós gyökét, amit most könnyen látunk előre, hogy 4. Kiindulásul megoldjuk a

$$3q=-3,\qquad 3\left(q^2+t\right)=-3,\qquad q^3+3tq-2s=-4$$

egyenletrendszert, és azt kapjuk, hogy

$$q=-1,\qquad s=\frac{9}{2},\qquad t=-2$$

Mármost

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{s-\sqrt{t^3+s^2}}+\sqrt[3]{s+\sqrt{t^3+s^2}}-q\\
=\;&\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{(-2)^3+\left(\frac{9}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{(-2)^3+\left(\frac{9}{2}\right)^2}}+1\\
=\;&\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}+1=4
\end{aligned}$$

Rendben van! De tegyünk egy harmadik próbát is! Most tekintjük az

$$(x-1)(x-2)(x-4)=x^3-7x^2+14x-8$$

polinomot, és kiváncsiak vagyunk, megkapjuk-e az $1,2,4$ számok valamelyikét, mert ezek a gyökök. Először megoldjuk a

$$3q=-7,\qquad 3\left(q^2+t\right)=14,\qquad q^3+3tq-2s=-8$$

egyenletrendszert:

$$q=-\frac{7}{3},\qquad s=\frac{10}{27},\qquad t=-\frac{7}{9}$$

Most a gond az, hogy nem teljesül a $t^3+s^2\geq 0$ feltétel, tehát a fenti módszer nem működik!

A továbbiakban tehát feltesszük, hogy $t^3 + s^2 < 0$. Ilyenkor a

$$\sqrt[3]{s - \sqrt{t^3 + s^2}} + \sqrt[3]{s + \sqrt{t^3 + s^2}}$$

képlet értelmezhetetlen valós számokra, és ezért nem tudjuk megoldani az $x^3 + 3tx - 2s = 0$ egyenletet. Mivel most $t < -\sqrt[3]{s^2} \leq 0$, ezért $\sqrt{-t} > 0$, és így az $y = x(-t)^{-1/2}$ helyettesítéssel az egyenlet az

$$(y\sqrt{-t})^3 + 3t(y\sqrt{-t})^3) - 2s = 0$$

alakot nyeri, azaz $y^3 - 3y - 2s(-t)^{-3/2} = 0$. A 2. tétel szerint ezt az egyenletet meg tudjuk oldani; az egyik megoldás:

$$y_1 = 2\cos\frac{\arccos\left(s(-t)^{-3/2}\right)}{3}$$

Az $x^3 + 3tx - 2s = 0$ egyenlet egyik megoldása tehát

$$x_1 = 2\sqrt{-t}\cos\frac{\arccos\left(s(-t)^{-3/2}\right)}{3}$$

Az utolsó számpéldánk esetében, amikor

$$q = \frac{-7}{3}, \quad s = \frac{10}{27}, \quad t = \frac{-7}{9}$$

és

$$s(-t)^{-3/2} = \frac{10}{27} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{-3/2} = \frac{10}{7\sqrt{7}}$$

akkor a megoldás

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\frac{10}{7\sqrt{7}}\right) - \frac{-7}{3}$$

Ennek a képletnek a pontos értéke éppen 4. Ha nem elégszünk meg a numerikus számolás révén rendelkezésünkre álló közelítőleges ellenőrizhetőséggel, akkor a teljes pontosság érdekében ellenőrizzük azt, hogy

$$\frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot z - \frac{-7}{3} = 4$$

esetén

$$z = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\frac{10}{7\sqrt{7}}\right)$$

azaz

$$\frac{5}{2\sqrt{7}} = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\frac{10}{7\sqrt{7}}\right)$$

Azt kell tehát megnéznünk, hogy

$$\cos\varphi = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

esetén fennáll-e

$$\cos 3\varphi = \frac{10}{7\sqrt{7}}$$

Valóban

$$\begin{aligned}
\cos 3\varphi &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = (\cos\varphi)\left(4\cos^2\varphi - 3\right) \\
&= \frac{5}{2\sqrt{7}} \cdot \left(\frac{4\cdot 5^2}{(2\sqrt{7})^2} - 3\right) = \frac{5}{2\sqrt{7}} \cdot \left(\frac{100}{28} - 3\right) = \frac{10}{7\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

Végezetül megvizsgáljuk, hogy az 1. illetve a 2. tétel esetében mi a helyzet a harmadfokú polinom többi valós gyökével, ha van neki egyáltalán. Az első tétel esetében a harmadfokú polinom deriváltja: $3x^2 + 1 > 0$, tehát nincs több valós gyök, csak x_1. A 2. tétel esetében világos, hogy $-2 \le x_1 \le 2$. A harmadfokúnak mindhárom gyöke valós, hiszen a másik kettő megkapható a következő képletekkel:

$$x_2 = \frac{-x_1 - \sqrt{3(2-x_1)(2+x_1)}}{2}, \qquad x_3 = \frac{-x_1 + \sqrt{3(2-x_1)(2+x_1)}}{2}$$

Ezeket úgy kaptuk, hogy megoldottuk az $x^2 + x_1 x + x_1^2 - 3 = 0$ másodfokút.

3. tétel. A 2. tételben szereplő polinom 3 gyökéhez van olyan szabályos háromszög az xy koordinátarendszerben, mely háromszög középpontja az origó, a három csúcs x-kordinátája pedig a fent kiszámolt x_1, x_2, x_3. A szabályos háromszög köré írható kör sugara pedig pontosan 2.

Legyen $\varphi = \frac{\arccos\ell}{3}$. Mivel $x_1 = 2\cos\varphi$, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$x_2 = 2\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad x_3 = 2\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Mármost

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) &= 4\cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} - 4\sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= -2\cos\varphi - 2\sqrt{3}\sin\varphi \\
&= -x_1 - \sqrt{12 - 12\cos^2\varphi} \\
&= -x_1 - \sqrt{3(2-2\cos\varphi)(2+2\cos\varphi)} \\
&= -x_1 - \sqrt{3(2-x_1)(2+x_1)} \\
&= 2x_2
\end{aligned}$$

Az x_3-ra vonatkozó azonosság hasonlóan bizonyítható. A szabályos háromszög oldalai könnyen láthatóan $2\sqrt{3}$ hosszúságúak. A háromszög éppen φ szöggel van elforgatva ahhoz a szabályos háromszöghöz képest, melynek egyik szimmetriatengelye az x-tengely.

A 2. és 3. tételek szövegkörnyezetében tekintsük azt az elforgatást, mely az x-tengely pozitív felét úgy forgatja el az origó körül, hogy az keresztülmenjen fent említett háromszögnek az x_1-hez társított csúcsán. Ha ennek az elforgatásnak a szögét megháromszorozzuk, akkor az x-tengely ezen új elforgatottjának keresztül kell menni azon a ponton, mely rajta van az $x = 1$ egyenletű egyenesen és az origótól való távolsága az x-tengely elforgatottján előjelesen értelmezve éppen ℓ. Kimondhatjuk tehát, hogy vagy a

$$\sqrt[3]{s - \sqrt{t^3 + s^2}} + \sqrt[3]{s + \sqrt{t^3 + s^2}}$$

képlet alkalmazásával vagy pedig szögharmadolás révén meg tudunk oldani minden harmadfokú polinomegyenletet, és nem kell nekünk sem a Cardano-képlet, sem a komplex számok ismerete, csak a valós számokon végezhető alapműveletek.

A fenti számításainknak egy érdekes geometriai következményét is kiolvashatjuk:

Legyen adva egy egyenes és azon három különböző pont: X_1, X_2, X_3. Ekkor létezik egy olyan $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög, melynek középpontja éppen a három adott pont súlypontja, és az adott egyenesen az A_j-hez legközelebbi pont éppen X_j, $j = 1, 2, 3$.

A bizonyítás úgy jön ki, hogy az egyenes számegyenesnek tekintjük, az O súlypontot origónak, az X_j pontot x_j valós számnak, és a fenti módszert alkalmazzuk az $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ harmadfokú megoldására. Annak kitalálását, hogy mekkora legyen az egység, az olvasóra bízzuk. Úgyszintén annak kinyomozását, ki publikálta először ezt a geometriai észrevételt.

Végezetül az 1. tétel néhány speciális esetét külön is kimondjuk, azaz adunk olyan σ számokból és $f_\sigma(x)$ harmadfokú polinomokból álló párokat, melyekre igaz, hogy az $f_\sigma(x)$ polinomnak egyetlen valós gyöke éppen a megadott σ számra $\sigma - \sigma^{-1}$ szám. Ezeket a párokat egy táblázatban közöljük és minden párhoz megadjuk a generáló k értéket is. A táblázatot „szemüveg”-táblázatnak nevezem, és ennek az elnevezésnek az a prózai oka, hogy a

$$\sigma - \sigma^{-1}$$

képlet úgy néz ki, mint egy szemüveg, és a táblázat adatainak meglátására először ezt a „szemüveget" kell felvenni.

A táblázatban közölt adatok közül talán a $k = 1/9$ értékre vonatkozó a legérdekesebb. Konkrétan: az $x^3 + 3x = 6$ egyenlet egyetlen valós megoldása: $\sqrt[3]{\sqrt{10}+3} - \sqrt[3]{\sqrt{10}-3}$.

k	σ	$f_\sigma(x)$
1	$\sqrt[3]{\sqrt{730}+27}$	$x^3+3x-54$
-1	$\sqrt[3]{\sqrt{730}-27}$	$x^3+3x+54$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\sqrt{730}+27}$	$x^3+3x-27$
$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\sqrt{730}-27}$	$x^3+3x+27$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{\sqrt{82}+9}$	$x^3+3x-18$
$\frac{-1}{3}$	$\sqrt[3]{\sqrt{82}-9}$	$x^3+3x+18$
$\frac{2}{3}$	$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18}$	$x^3+3x-36$
$\frac{-2}{3}$	$\sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}$	$x^3+3x+36$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\sqrt{85}+9}$	x^3+3x-9
$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\sqrt{85}-9}$	x^3+3x+9
$\frac{1}{9}$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}+3}$	x^3+3x-6
$\frac{-1}{9}$	$\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}$	x^3+3x+6
$\frac{2}{9}$	$\sqrt[3]{\sqrt{37}+6}$	$x^3+3x-12$
$\frac{-2}{9}$	$\sqrt[3]{\sqrt{37}-6}$	$x^3+3x+12$