Haladvány Kiadvány 2012.06.28

.

Pitagoraszi számhármasok és speciális ötödfokú egyenletek

.

Hujter Mihály

.

A dolgozatot Püthagorasz *hatvannyolcadik születésnapjára dedikáljuk.*
(A dolgozat végén fog kiderülni, hogy miért pont erre a születésnapra.)

.

Megmutatjuk, hogy ha

$$a^2 + b^2 = c^2$$

és

$$4s^5 = a^2$$

akkor az x-re felírt

$$x^5 + 5sx^3 + 5s^2x = b$$

egyenletnek az egyik megoldása:

$$x_1 = \frac{\sqrt[5]{c+b} - \sqrt[5]{c-b}}{\sqrt[5]{2}}$$

Például az $a = 64$, $b = 48$, $c = 80$ választással azt kapjuk, hogy $s = 4$ és így az

$$x^5 + 20x^3 + 80x - 48 = 0$$

egyenlet egyik megoldása:

$$x_1 = \frac{\sqrt[5]{80+48} - \sqrt[5]{80-48}}{\sqrt[5]{2}} = 2\left(\sqrt[5]{2} - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$$

A bizonyítás során először tekintsük az $s = 0$ esetet. Ekkor $a = 0$ és $b = c$, továbbá az ötödfokú egyenlet $x^5 = b$ alakú, míg x_1-re $\sqrt[5]{b}$ jön ki, ami nyilván megoldás. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $s \neq 0$.

Tekintsük a $z - s/z$ képletet

$$z = \frac{x + \sqrt{4s + x^2}}{2}$$

esetén:

$$\begin{aligned} z - \frac{s}{z} &= \frac{x + \sqrt{4s+x^2}}{2} - \frac{2s}{x + \sqrt{4s+x^2}} \\ &= \frac{x + \sqrt{4s+x^2}}{2} - \frac{2s}{x + \sqrt{4s+x^2}} \cdot \frac{x - \sqrt{4s+x^2}}{x - \sqrt{4s+x^2}} \\ &= \frac{x + \sqrt{4s+x^2}}{2} - \frac{2s\left(x - \sqrt{4s+x^2}\right)}{-4s} \\ &= x \end{aligned}$$

Tehát az ötödfokú egyenlet így is írható:

$$\left(z-\frac{s}{z}\right)^5+5s\left(z-\frac{s}{z}\right)^3+5s^2\left(z-\frac{s}{z}\right)-b=0$$

Rendezve a fenti egyenletet ezt kapjuk:

$$z^{10}-bz^5-s^5=0$$

Mármost $v=2z^5$ jelöléssel az

$$\frac{1}{4}v^2-\frac{b}{2}v-\frac{a^2}{4}=0$$

azaz a

$$v^2-2bv+c^2-b^2=0$$

egyenlet jön ki, melynek megoldásai: $b+c$ és $b-c$. Tehát u-ra a két megoldás: $\sqrt[5]{\frac{b+c}{2}}$ és $\sqrt[5]{\frac{b-c}{2}}$. Mindazonáltal az első gyök esetében

$$\begin{aligned}
z-\frac{s}{z} &= \sqrt[5]{\frac{b+c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5}{b+c}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{b+c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5}{b+c}\cdot\frac{c-b}{c-b}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{b+c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5(c-b)}{a^2}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{c+b}{2}}-\sqrt[5]{\frac{c-b}{2}}
\end{aligned}$$

és a második gyök esetében hasonlóan

$$\begin{aligned}
z-\frac{s}{z} &= \sqrt[5]{\frac{b-c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5}{b-c}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{b-c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5}{b-c}\cdot\frac{c+b}{c+b}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{b-c}{2}}-\sqrt[5]{\frac{2s^5(c+b)}{-a^2}} \\
&= \sqrt[5]{\frac{c+b}{2}}-\sqrt[5]{\frac{c-b}{2}}
\end{aligned}$$

Megkaptuk tehát az

$$x_1=\sqrt[5]{\frac{c+b}{2}}-\sqrt[5]{\frac{c-b}{2}}$$

megoldást, ahogyan azt állítottuk.

Ismeretes, hogy ha $p(x)$ egy legfeljebb harmadfokú polinom, akkor az

$$x^5 + qx^4 + p(x) = 0$$

egyenlet az

$$y = x + \frac{q}{5}$$

helyettesítéssel

$$\left(y - \frac{q}{5}\right)^5 + q\left(y - \frac{q}{5}\right)^4 + p\left(y - \frac{q}{5}\right) = 0$$

alakú egyenletté alakítható, mely rendezve az

$$y^5 + r(y) = 0$$

alakot nyeri, ahol $r(y)$ egy olyan legfeljebb harmadfokú polinom, mely könnyen kiszámolható a $p(x)$ polinomból. Ha most az $r(y)$ polinom olyan specialitással bír, hogy y^2 együtthatója 0, y^3 együtthatója pozitív, és ennek az együtthatónak a négyzete pont ötszöröse y együtthatójának, akkor az ötödfokú egyenlet egyik megoldására képletet tudunk adni. Ekkor ugyanis a az ötödfokú egyenletünk

$$y^5 + my^3 + \frac{m^2}{5}y + k = 0$$

alakot nyer; most pedig az

$$\begin{aligned} s &= \frac{m}{5} \\ b &= -k \\ c &= \sqrt{k^2 + 4s^5} \end{aligned}$$

jelölésekkel a fent ismertetett módszerrel megkaphatjuk az egyik megoldást.

Nézzünk egy példát:

$$x^5 \ - 15x^4 + 100x^3 - 360x^2 + 695x = 600$$

Az $y = x - 3$ jelöléssel:

$$(y+3)^5 \ - 15(y+3)^4 + 100(y+3)^3 - 360(y+3)^2 + 695(y+3) = 600$$

azaz

$$y^5 + 10y^3 + 20y - 27 = 0$$

Tehát most $s = 2$, $a = 8\sqrt{2}$, $b = 27$, $c = \sqrt{857}$. A fentiek szerint tehát az ötödfokúak egy-egy megoldása:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[5]{\frac{c+b}{2}} - \sqrt[5]{\frac{c-b}{2}} = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{857}+27}{2}} - \sqrt[5]{\frac{\sqrt{857}-27}{2}} \\ x_1 &= y_1 + 3 = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{857}+27}{2}} - \sqrt[5]{\frac{\sqrt{857}-27}{2}} + 3 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $3^6+2^7 = 857$ prímszám, így a képlet lényeges egyszerűsítése reménytelen, csupán csak kissé másképp írható:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt[5]{\frac{3^3+\sqrt{3^6+2^7}}{2}} \\
x_1 &= 3+\sigma-\frac{2}{\sigma}
\end{aligned}$$

Végül adósok vagyunk a cím alatti ajánlás indoklásával. Úgy tudjuk, Püthagorasz Krisztus előtt 582-ben született, tehát 2525 évvel ezelőtt volt

$$2012 - 1 + 582 - 2525 = 68 = 2^2 17$$

éves. A pitagoraszi számhármasok és köztük különösen az ötös szám társulnak a nevéhez márpedig

$$2525 = 5^2 101$$

a következő érdekes tulajdonsággal bír:

$$\sqrt[5]{2525} + \frac{1}{\sqrt[5]{2525}}$$

értéke nagyon közel van 5-höz. Ennek az az oka, hogy

$$\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^5 + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^5 = 2525$$

és itt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^5 &= \left(\frac{2}{5+\sqrt{21}}\right)^5 = \frac{2}{2525+551\sqrt{21}} \\
&= \frac{4}{5050+551\sqrt{84}} < \frac{4}{5050+551\sqrt{81}} \\
&= \frac{4}{10009} < \frac{1}{2500}
\end{aligned}$$