Haladvány Kiadvány 2012.08.08

Beszorított harmonikusok

Hujter Mihály

Egy gyors és elemi bizonyítást adunk a következő tételre: $n = 5, 6, 7, \ldots$ esetén

$$\frac{12}{11} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{11}{10} \quad .$$

Jelölje a_n a középső képletet. Mivel

$$a_5 = \sum_{j=6}^{16} \frac{1}{j} = \frac{158\,183}{144\,144}$$

és

$$\frac{158\,183}{144\,144} - \frac{12}{11} = \frac{85}{13\,104}$$

ezért a bal oldali egyenlőtlenség fennáll $n = 5$-re. Másrészt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} \end{aligned}$$

Tehát az a_n sorozat szigorúan monoton nő. Ezért elegendő azt megmutatni, hogy

$$\frac{158\,183}{144\,144} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} < \frac{11}{10}$$

Tekintettel arra, hogy

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} = \frac{14\,039}{144\,144}$$

és hogy

$$\frac{158\,183}{144\,144} - \frac{14\,039}{144\,144} = 1 \quad ,$$

valójában azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} < \frac{1}{10} \quad .$$

Az az érdekes, hogy a fenti sorösszeget pontosan ki tudnánk számolni; az jönne ki rá, hogy $\ln 3 - 1 \approx 0.099$. Azonban itt most nem bajlódunk ezzel. Mivel

$$\sum_{n=0}^{18} \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} = \frac{37\,717\,984\,058\,802\,320\,713}{382\,865\,638\,053\,701\,224\,800}$$

és

$$\frac{1}{10} - \frac{37\,717\,984\,058\,802\,320\,713}{382\,865\,638\,053\,701\,224\,800} = \frac{568\,579\,746\,567\,801\,767}{382\,865\,638\,053\,701\,224\,800}$$

ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\sum_{n=19}^{\infty} \frac{2}{3\,(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} < \frac{568\,579\,746\,567\,801\,767}{382\,865\,638\,053\,701\,224\,800}$$

azaz hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=19}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} &< \frac{3}{2} \cdot \frac{568\,579\,746\,567\,801\,767}{382\,865\,638\,053\,701\,224\,800} \\ &= \frac{568\,579\,746\,567\,801\,767}{255\,243\,758\,702\,467\,483\,200} \end{aligned}$$

Mivel $n \geq 19$ esetén

$$(3n+4)\,(n+1) - 21(3n+5) = 3n^2 - 56n - 101$$

pozitív (hiszen a $3x^2 - 56x - 101$ polinom nagyobbik gyöke $\frac{28+\sqrt{814}}{3} < 19$), ezért

$$\sum_{n=19}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\,(3n+4)\,(n+1)} < \sum_{n=19}^{\infty} \frac{1}{21\,(3n+2)\,(3n+5)}$$

Itt

$$\begin{aligned} \sum_{n=19}^{\infty} \frac{1}{21\,(3n+2)\,(3n+5)} &= \frac{1}{63} \sum_{n=19}^{\infty} \frac{3}{(3n+2)\,(3n+5)} \\ &= \frac{1}{63} \sum_{n=19}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right) \\ &= \frac{1}{63} \cdot \frac{1}{59} = \frac{1}{3717} \end{aligned}$$

Mármost

$$\frac{568\,579\,746\,567\,801\,767}{255\,243\,758\,702\,467\,483\,200} - \frac{1}{3717} = \frac{88\,484\,150\,442\,383\,413\,559}{45\,178\,145\,290\,336\,744\,526\,400}$$

pozitivitása teszi teljessé a bizonyítást.

Végezetül megjegyezzük, hogy az a_n képletben szereplő $2n+1$ darab tag harmonikus közepe éppen $\frac{1}{2n+1}$. A fenti eredmények azt vonják maguk után, hogy ugyanezen $2n+1$ darab tag számtani közepe $\frac{b_n}{2n+1}$, ahol a b_n sorozat szigorúan monoton növekvően tart az $\ln 3 \approx 1.099$ határértékhez. A konvergencia sebességét a következő táblázat szemlélteti:

$n =$	5	10	20	50	100	200
$b_n =$	1.0974	1.0983	1.0985	1.09860	1.098608	1.098611

Összefoglalva: A számtani közép körülbelül $97-99$ ezrelékkel magasabb a harmonikus középnél.