Haladvány Kiadvány 2012.09.30

A4 és A5 méretű ellipszisek merőlegességi kapcsolatáról

Hujter Mihály

A szerző fiának huszonnegyedik születésnapjára

Álló helyzetben tekintsünk egy A4-es papírlapot, és vágjuk ki belőle a lehető legnagyobb ellipszist. Aztán ismételjük meg az eljárást azzal a papírlappal, amit úgy kapunk, hogy egy másik álló helyzetű A4-es lap felső és alsó negyedét előbb eltávolítjuk. Itt most erről a két ellipszisről lesz szó. Ez az írás a KöMal 1975. novemberi számában, a 129–131 oldalakon közölt F.1988 feladatmegoldás ötletének felhasználásával készült.

Legyen AB egy olyan ellipszis kisebbik tengelye, melynek a nagyobbik tengelye $\sqrt{2}$-ször akkora. Bizonyítandó, hogy ha C befutja az ellipszis vonalát, akkor az ABC háromszög magasságpontja az eredetivel hasonló ellipszisen fut.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az eredeti ellipszis egyenlete

$$2x^2 + y^2 = 4$$

és a kisebbik tengely végpontjai: $A(-\sqrt{2}; 0)$ és $B(+\sqrt{2}; 0)$. Az általános helyzetben a C pont koorninátái: $(\xi; \eta)$, ahol

$$2\xi^2 + \eta^2 = 4$$

Állítjuk, hogy az ABC háromszög magasságpontja $(\xi; \eta/2)$. Elegendő ezt megmutatni, ekkor ugyanis

$$2(\eta/2)^2 = \eta^2/2 = 2 - \xi^2$$

miatt

$$2(\eta/2)^2 + \xi^2 = 2$$

Ebből pedig már látható, hogy a magasságpont pályája az eredeti ellipszisnek $\sqrt{2}$-edrésze derékszöggel elforgatva, ahol a forgatva kicsinyítést az eredeti ellipszis középpontjából végezzük.

Annak megmutatásához, hogy az $M(\xi;\eta/2)$ pont valóban magasságpont, elegendő azt látni, hogy az AM szakasz merőleges a BC oldalra, hiszen ugyanígy igazolható, hogy a BM szakasz merőleges a CA oldalra. Mármost az AM szakasz meredeksége:

$$\frac{\eta/2}{\xi+\sqrt{2}}$$

Ugyanakkor a BC oldal meredeksége:

$$\frac{\eta}{\xi-\sqrt{2}}$$

Azzal leszünk készen, hogy a két meredekség szorzata -1, hiszen

$$\frac{\eta/2}{\xi+\sqrt{2}}\cdot\frac{\eta}{\xi-\sqrt{2}}=\frac{\eta^2/2}{\xi^2-2}=\frac{\eta^2/2}{-\eta^2/2}$$