Haladvány Kiadvány 2012.10.20

Hét fokos hetedfokú azonosság

Geszler Döme és Hujter Mihály

Bizonyítjuk a következőt:

$$64\left(\sin^7 7^\circ + \sin^7 127^\circ + \sin^7 247^\circ\right) + 63\sin 21^\circ = 0$$

Kiindulunk a következő három azonosságból:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^3 x + \sin 3x}{3} &= \sin x - \sin^3 x \\
\frac{\sin^5 x + \sin 5x}{5} &= \sin x - 4\sin^3 x + \frac{17}{5}\sin^5 x \\
\frac{\sin^7 x + \sin 7x}{7} &= \sin x - 8\sin^3 x + 16\sin^5 x - 9\sin^7 x
\end{aligned}$$

Ezek átfogalmazásai a következők:

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
\sin 5x &= 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x \\
\sin 7x &= 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x
\end{aligned}$$

Az első jól ismert; állítólag már *Regiomontanus* megtalálta hatodfél évszázaddal ezelőtt. Ha az első azonosságba x helyett $\frac{\pi}{2} - x$ kerül, akkor ezt nyerjük:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Az addiciós képletekből:

$$\begin{aligned}
\sin 5x &= \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x \\
&= \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\left(2\sin x\cos x\right) \\
&= 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x
\end{aligned}$$

Ha ebbe az utolsó azonosságba x helyett $\frac{\pi}{2} - x$ kerül, akkor ez jön ki:

$$\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$$

Mindazonáltal az addiciós képletekből:

$$\begin{aligned}
\sin 7x &= \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x \\
&= \left(5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x\right)(1 - 2\sin^2 x) \\
&\quad + \left(5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x\right)(2\sin x\cos x) \\
&= 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x
\end{aligned}$$

Az utolsó képletből ezt nyerjük:

$$64\sin^7 x = 7\sin x - \sin 7x - 7(8\sin^3 x - 16\sin^5 x)$$

A fentiek szerint

$$16\sin^5 x = \sin 5x - \ 5\sin x + 20\sin^3 x$$

Tehát

$$\begin{aligned}
64\sin^7 x &= 7\sin x - \sin 7x - 7(8\sin^3 x - \sin 5x + 5\sin x - 20\sin^3 x\ ) \\
&= -\sin 7x + 7\sin 5x - 28\sin x + 84\sin^3 x
\end{aligned}$$

A fentiek szerint

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

Tehát

$$\begin{aligned}
64\sin^7 x &= -\sin 7x + 7\sin 5x - 28\sin x + 21(3\sin x - \sin 3x) \\
&= -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x
\end{aligned}$$

Most vegyük észre, hogy

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\sin x$$

Itt x helyett $3x$-et, $5x$-et illetve $7x$-et írva megkapjuk ezeket:

$$\begin{aligned}
\sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 3\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= 2\sin 3x \\
\sin 5\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 5\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= -\sin 5x \\
\sin 7\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin 7\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) &= -\sin 7x
\end{aligned}$$

Mindazonáltal

$$\sin^7 x + \sin^7\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^7\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) + \ \frac{63}{64}\sin 3x = 0$$

Ebbe a képletbe x helyére $7°$-ot beírva megkapjuk a dolgozat elején állított azonosságot.

Végezetül megjegyezzük, hogy az is kijött, hogy

$$\sin^7 7° + \sin^7 127° + \sin^7 247°$$

algebrai szám, sőt körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, hiszen ismert, hogy

$$16 \sin 21° = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}+5} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$$

Hasonlóan igazolható, hogy ha x fokokban kifejezve egész szám, azaz ha a $180x/\pi$ egész, akkor

$$\sin^7 x + \sin^7 (x+120°) + \sin^7 (x+240°)$$

kifejezhető a négy alapművelettel az egész számokból és a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{20}+10}$ számokból, hiszen

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2}\sin 3° &= \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{\sqrt{20}+10} \\ 8\sqrt{2}\cos 3° &= \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{\sqrt{20}+10} + \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) \end{aligned}$$

és

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20}+10}\right)^2}{2} - 6 = \sqrt{5}-1$$