Haladvány Kiadvány 2012.12.31

Kétezer-tizenharmadik hatványok összegéről

Hujter Mihály

Állítás. Legyen n egy rögzített nemnegatív egész. Ekkor

$$\begin{aligned} \sin\varphi + \cos\varphi &= x \\ \sin^{2n+1}\varphi + \cos^{2n+1}\varphi &= y_n \end{aligned}$$

esetén y_n kifejezhető x polinomjaként.

Bizonyítás. Az $n = 0$ eset nyilvánvaló, hiszen $y_0 = x$. Mármost

$$x^2 - 1 = (\sin\varphi + \cos\varphi)^2 - 1 = \sin 2\varphi$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sin^{2n+3}\varphi + \cos^{2n+3}\varphi \\ &= \left(\sin^{2n+1}\varphi + \cos^{2n+1}\varphi\right)\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \\ &\quad - \sin^2\varphi\cos^{2n+1}\varphi - \cos^2\varphi\sin^{2n+1}\varphi \\ &= y_n - \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\sin\varphi\cos^{2n}\varphi + \cos\varphi\sin^{2n}\varphi\right) \\ &= y_n - \frac{x^2-1}{2}\left(\sin\varphi\cos^{2n}\varphi + \cos\varphi\sin^{2n}\varphi\right) \end{aligned}$$

Ezt a képletet az $n = 0$ értékre alkalmazva megnyerjük az állítást y_1-re is. Az $y_2, y_3, ...$ esetében pedig teljes indukcióval leszünk készen, hiszen

$$\begin{aligned} & y_n - \frac{x^2-1}{2}\left(\sin\varphi\cos^{2n}\varphi + \cos\varphi\sin^{2n}\varphi\right) \\ = \;& y_n - \frac{x^2-1}{4}(\sin 2\varphi)\left(\sin^{2n-1}\varphi + \cos^{2n-1}\varphi\right) \\ = \;& y_n - \frac{(x^2-1)^2}{4}\cdot y_{n-1} \end{aligned}$$

Konkrétan kiszámolva:

$$\begin{aligned}
y_0 &= x \\
y_1 &= x - \frac{x^2-1}{2}\cdot x = \frac{x(3-x^2)}{2} \\
y_2 &= \frac{x(3-x^2)}{2} - \frac{(x^2-1)^2}{4}\cdot x = \frac{x(5-x^4)}{4} \\
y_3 &= \frac{x(5-x^4)}{4} - \frac{(x^2-1)^2}{4}\cdot\frac{x(3-x^2)}{2} = \frac{x\left(7+7x^2-7x^4+x^6\right)}{8} \\
y_4 &= \frac{x\left(7+7x^2-7x^4+x^6\right)}{8} - \frac{(x^2-1)^2}{4}\cdot\frac{x(5-x^4)}{4} \\
&= \frac{x(3-x^2)(3+9x^2-3x^4-x^6)}{16} = \frac{x(9+24x^2-18x^4+x^8)}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_5 &= \frac{x(9+24x^2-18x^4+x^8)}{16} - \frac{(x^2-1)^2}{4}\cdot\frac{x\left(7+7x^2-7x^4+x^6\right)}{8} \\
&= \frac{x\left(11+55x^2-22x^4-22x^6+11x^8-x^{10}\right)}{32}
\end{aligned}$$

Az eredményeink erejét három versenyfeladattal illusztráljuk:

1. Kiszámítandó $\sin\varphi+\cos\varphi$, ha φ hegyesszög és

$$\frac{\sin^7\varphi+\cos^7\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi} = \frac{2143}{18^3}$$

Válasz: $\sin\varphi+\cos\varphi = \frac{4}{3}$.
Indoklás: A $z = 9x^2$ jelöléssel a fentiekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{2143}{18^3} = \frac{\sin^7\varphi+\cos^7\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi} = \frac{7+7\left(z/9\right)-7\left(z/9\right)^2+\left(z/9\right)^3}{8}$$

Ebből:

$$2143 = 9^3 7 + 9^2 7z - 63z^2 + \ z^3$$

Ennek a harmadfokúnak a három gyöke: 16, $\frac{47-\sqrt{2949}}{2} \approx -3.65$, $\frac{47+\sqrt{2949}}{2} \approx 50.65$. Ne feledjük, hogy

$$z = 9(\sin\varphi+\cos\varphi)^2$$

és így $0 \le z \le 36$. Tehát $z = 16$, azaz $|x| = \frac{4}{3}$. Mivel φ hegyesszög, ezért $x < 0$ lehetetlen.

2. Bizonyítandó, hogy $\sin^{2013}\varphi+\cos^{2013}\varphi$ racionális szám, feltéve, hogy $\sin\varphi+\cos\varphi$ is az.

Bizonyítás. Tetszőleges nemnegatív egész n-re bizonyítjuk, hogy $\sin^{2n+1}\varphi+\cos^{2n+1}\varphi$ racionális, feltéve, hogy $\sin\varphi+\cos\varphi$ is az. A fenti állítás bizonyításából vegyük észre, hogy $2^n y_n$ egy egészegyütthatós polinomja x-nek.

3. Határozzuk meg a $\frac{\sin^7\varphi+\cos^7\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}$ függvény maximumát!

Megoldás. A fentiek szerint a

$$\frac{8y_3}{y_0}=7+7x^2-7x^4+x^6$$

polinom maximumhelye érdekel bennünket. Alkalmazzuk az $u=x^2$ jelölést.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(7+7u-7u^2+u^3\right)=7-14u+3u^2$$

Az utolsó polinom gyökei: $\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}$ és $\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$. Tehát két jelöltünk van a maximumértékre:

$$\begin{aligned}
7+7\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)-7\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^2+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^3 &= \frac{2^3 7}{3^3}\left(2\sqrt{7}-1\right)\\
7+7\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)-7\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^2+\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\right)^3 &= \frac{2^3 7}{3^3}\left(-2\sqrt{7}-1\right)
\end{aligned}$$

A felső érték adja a maximumot, aminek nyolcada: $\frac{14\sqrt{7}-7}{27}\approx 1.1126$