Haladvány Kiadvány 2013.02.28

Speciális bináris számora vonatkozó azonosság

Hujter Mihály

Ajánlás: Ajánlom a jelen rövid írást *Császár Ákos* és *Laczkovich Miklós* tiszteletére; mindketten ezekben a napokban ünnepelték a születésnapjukat. Kettőjüktől tanultam a legtöbbet a numerikus sorokról, amikor 1976 és 1979 között tanáraim voltak.

Pár napja *Donald Knuth* egy szép feladványt tett közzé [1]. Ezt egy kissé átalakított formában közöljük, majd bizonyítjuk. A nevezőkben lévő úgynevezett *repunit* számok *binárisan* értendők, ráadásul mindegyikben *kettőhatvány darabszámú* 1-es számjegy található. A bizonyítandó azonosság — binárisan értve — a következő:

$$
\begin{aligned}
& \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{1111}\right)\left(1+\frac{1}{11111111}\right)\ldots \\
= \quad & 1.1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{1\cdot 11\cdot 1111}+\frac{1}{1\cdot 11\cdot 1111\cdot 11111111}+\ldots
\end{aligned}
$$

Például a 16-jegyű számokig kiírva a bal oldalon ezt kapjuk tízes számrendszerbe átírva:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{255}\right)\left(1+\frac{1}{65535}\right)$$

Ugyanakkor decimálisan a jobb oldal ennyi (a binárisan 16-jegyű számokig értve):

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15\cdot 255}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15\cdot 255\cdot 65535}$$

Az utóbbi szám a nagyobb, de a különbség nagyon kicsi:

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15\cdot 255}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 15\cdot 255\cdot 65535}\right) \\
& -\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{255}\right)\left(1+\frac{1}{65535}\right) \\
= \quad & \frac{1}{1504\,028\,250}
\end{aligned}
$$

Valamit talán megsejthetünk, ha a nevezőt prímtényezőkre bontjuk:

$$1504\,028\,250 = 2 \cdot 3^4 5^3 17^2 257$$

A páratlan prímtényezők tehát mind Fermat-prímek!

Mielőtt általánosítjuk az észrevételeinket, vezessünk be pár jelölést: Legyen nemnegatív egész k számokra $a_k = 2^{2^k} - 1$, $b_k = a_k + 2$. A jelölések egyenes következménye, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = b_1 = 3$, $a_k b_k = a_{k+1}$, $b_0 b_1 ... b_{k-1} = a_k$ és $b_0^n b_1^{n-1} ... b_{n-2}^2 b_{n-1} = a_0 a_1 a_2 ... a_n$ minden nemnegatív egész k-ra. (Az utóbbi három azonosság teljes indukcióval könnyen látható.) Legyen továbbá nemnegatív egész n számokra

$$\begin{aligned} X_n &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right) ... \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \\ Y_n &= \frac{3}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 15} + ... + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 15 \cdot ... \cdot \ a_n} \end{aligned}$$

ÁLLÍTÁS. $n = 0, 1, 2, ...$ esetén fennáll

$$Y_n - X_n = \frac{1}{2a_0 a_1 a_2 ... a_n}$$

BIZONYÍTÁS. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 0$ esetben ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\ Y_0 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{1} = \frac{5}{2} \\ Y_0 - X_0 &= \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a_0} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ez tehát rendben van. Most az indukciós lépéshez abból indulunk ki, hogy

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - X_{n+1} &= (Y_{n+1} - Y_n) - (X_{n+1} - X_n) + (Y_n - X_n) \\ &= \frac{1}{a_0 a_1 a_2 ... a_n a_{n+1}} - \frac{X_n}{a_{n+1}} + (Y_n - X_n) \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$X_n = \frac{a_{n+1} + 1}{2a_0 a_1 a_2 ... a_n}$$

és így
$$\frac{X_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2a_0a_1a_2...a_n} + \frac{1}{2a_0a_1a_2...a_na_{n+1}}$$
Az indukciós feltevésből:
$$Y_n - X_n = \frac{1}{2a_0a_1a_2...a_n}$$
Tehát
$$\begin{aligned} Y_{n+1} - X_{n+1} &= \frac{1}{a_0a_1a_2...a_na_{n+1}} \\ &\quad -\frac{1}{2a_0a_1a_2...a_n} - \frac{1}{2a_0a_1a_2...a_na_{n+1}} \\ &\quad +\frac{1}{2a_0a_1a_2...a_n} \\ &= \frac{1}{2a_0a_1a_2...a_na_{n+1}} \end{aligned}$$
Ezzel a bizonyítás teljessé vált.

A bizonyított állításnak nyilván egyenes következménye a Knuth által kitűzött bizonyítandó azonosság.

Hivatkozás

[1] Knuth, D., *Problem 11685*, The American Mathematical Monthly, Vol. **120**, No. 1 (2013 January), page 76.