Haladvány Kiadvány 2013.04.30

Trapézok átlóinak hosszáról

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tekintsünk egy trapézt, mely melynek oldalai körben a, b, c, d, ahol az a és a c jelölésű oldalak párhuzamosak. Jelölje f azt az átlót, mely az a és b jelű oldalak találkozásából indul, és jelölje g a másik átlót. Bizonyítjuk, hogy ha $a \neq c$, akkor a trapéz átlóinak hossza:

$$f = \sqrt{ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a - c}} \qquad g = \sqrt{ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a - c}}$$

Következmények:

$$\begin{aligned} f^2 + g^2 &= 2ac + b^2 + d^2 \\ (a - c)\left(f^2 - g^2\right) &= (a + c)\left(b^2 - d^2\right) \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ezek az utóbbi képletek az $a = c$ esetben is érvényesek; a fentebbi a paralelogrammákra vonatkozó ismert összefüggést adja vissza, a lentebbi képlet viszont semmitmondó, de igaz. Az $a \neq c$ esetben pedig az utóbbi két egyenlőségből — kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása révén — kinyerhetők az f és g átlók hosszára felírt képletek. Az $a = c$ esetben a trapéz oldalhosszai nyilván nem határozzák meg az átlók hosszát külön-külön. Maradunk tehát az $a \neq c$ esetnél.

Szimmetriaokokból elegendő az f-re vonatkozó képletet igazolni, sőt az is feltehető, hogy $a > c$, hiszen az $a < c$ eset visszavezethező erre az $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow d$ szerepcserével. A képletek érvényessége a kicsinyítésre illetve nagyításra is invariáns. Feltehetjük tehát, hogy $a - c = 1$. Jelölje k a középvonal hosszát, azaz $k = \frac{a+c}{2}$. Tehát $a = k + \frac{1}{2}$ és $c = k - \frac{1}{2}$. Bizonyítandó, hogy

$$f^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) + \left(k + \frac{1}{2}\right)b^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)d^2$$

azaz hogy

$$f^2 = k^2 + \left(b^2 - d^2\right)k \; - \frac{1}{4} + \frac{b^2 + d^2}{2}$$

Jelölje az a jelű és a c jelű oldalak távolságát m. Az a, b, c, d oldalak sorrendkét pozitív körbenjárás szerint értjük. Koordinátarendszerben feltehetjük, hogy a c jelű oldal végpontjai: $(\frac{1-2k}{4}; \frac{m}{2})$ és $(\frac{2k-1}{4}; \frac{m}{2})$, és hogy valamely x valós számra az a jelű oldal végpontjai: $(x - \frac{1+2k}{4}; \frac{-m}{2})$ illetve $(x + \frac{1+2k}{4}; \frac{-m}{2})$. Mármost pozitív körbejárás szerint értve:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= \left(\frac{2k-1}{4} - \left(x + \frac{1+2k}{4} \right) \right)^2 + m^2 \\
&= x^2 + x + \frac{1}{4} + m^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2 &= \left(\frac{1-2k}{4} - \left(x - \frac{1+2k}{4} \right) \right)^2 + m^2 \\
&= x^2 - x + \frac{1}{4} + m^2
\end{aligned}
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
\frac{b^2 - d^2}{2} &= x \\
\frac{b^2 + d^2}{2} &= x^2 + \frac{1}{4} + m^2
\end{aligned}
$$

Az $(\frac{1-2k}{4}; \frac{m}{2})$ és $(x + \frac{1+2k}{4}; \frac{-m}{2})$ pontokat összekötő, tehát az f átló négyzete:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1-2k}{4} - \left(x + \frac{1+2k}{4} \right) \right)^2 + m^2 \\
=\ & k^2 + 2kx + x^2 + m^2 \\
=\ & k^2 + \left(b^2 - d^2\right) k + \frac{b^2 + d^2}{2} - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Pontosan ezt kellett igazolnunk.

Ha adott egy háromszög p, q, r oldalakkal, akkor könnyen kinyerhetjük a most bizonyított képletekből a súlyvonalak hosszára vonatkozó képleteket. Jelölje p', q' és r' rendre a p, q, r oldalakat felező súlyvonalak hosszát. Például p' kiszámításhoz tekintsük a háromszögben a q oldallal párhuzamos középvonallal lemetszett trapézt. Mostani szereposztásunk: $f = p'$, $a = q$, $b = \frac{r}{2}$, $c = \frac{q}{2}$,

$d = \frac{p}{2}$. A fentekből az f-re vonatkozó képletet alkalmazva:

$$\begin{aligned}
p' &= f = \sqrt{ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}} \\
&= \sqrt{q \cdot \frac{q}{2} + \frac{q \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2}{q - \frac{q}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2q^2 + 2r^2 - p^2}
\end{aligned}$$

Itt érdekességként megemlítjük, hogy ezt az eredmény iterálva megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p'' &= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(q''\right)^2 + 2\left(r''\right)^2 - \left(p''\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2\left(2r^2 + 2p^2 - q^2\right) + 2\left(2p^2 + 2q^2 - r^2\right) - \left(2q^2 + 2r^2 - p^2\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{9p^2} = \frac{3}{4}p
\end{aligned}$$

Ez *Egerváry Jenő* egy érdekes észrevétele: tehát a p'', q'', r'' oldalú háromszög hasonló az eredeti, azaz a p, q, r oldalakkal megadott háromszöghöz.

Érdemes talán megnéznünk, mit mond az f átló képlete a húrtrapézokra. Ilyen esetekben természetesen $b = d$ és $f = g$. Megkapjuk, hogy

$$f = \sqrt{ac + b^2}$$

azaz

$$fg = ac + bd$$

Ez az ismert *Ptolemájosz*-tétel!

Most tekintsünk egy szabályos ötszöget egységnyi oldalakkal! Az átlója hosszát jelölje t. Berajzolva egyet az átlók közül egy húrtrapézt nyerünk. Most alkalmazzuk a képletünket a következő szereposztással: $f = t$, $a = t$, $b = c = d = 1$. Ezt nyerjük:

$$t = f = \sqrt{ac + b^2} = \sqrt{t+1}$$

azaz

$$t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Még érdekesebb összefüggést nyerünk, ha a szabályos hétszög esetében alkalmazzuk a képletünket két különböző húrtrapézra. Jelölje $A_1, A_2, \ldots, A_7$ a szabályos hétszög hét csúcsát pozitív körüljárás szerint. Legyen a hétszög oldala egységnyi, a rövidebbik átlót jelölje s, a hosszabbikat pedig T. Meg fogjuk mutatni, hogy $Ts = T + s$. Ez úgy is fogalmazható, hogy $\frac{1}{s} + \frac{1}{T} = 1$, azaz a kétféle átlóhossz harmonikus közepe éppen 2. Először az $A_1A_2A_3A_4$ húrtrapézban alkalmazzuk a képletet az $f = s$, $a = T$, $b = c = d = 1$ szereposztással. Ezt nyerjük:

$$s = f = \sqrt{ac + b^2} = \sqrt{T + 1}$$

Másrészt az $A_4A_5A_7A_1$ húrtrapézban az $f = T$, $a = T$, $b = d = 1$, $c = s$ szereposztással ezt nyerjük:

$$T = f = \sqrt{ac + b^2} = \sqrt{Ts + 1}$$

Tehát

$$\begin{aligned} s^2 - 1 &= T \\ T^2 - Ts - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ezekből az

$$(s^2 - 1)^2 - (s^2 - 1)s - 1 = 0$$

azaz

$$s^3 = s^2 + 2s - 1$$

egyenlőséget nyerjük. Tehát

$$\begin{aligned} Ts &= (s^2 - 1)s = s^3 - s = \left(s^2 + 2s - 1\right) - s \\ &= s^2 + s - 1 = s^2 - 1 + s = T + s \end{aligned}$$

ahogyan ezt állítottuk. A $\vartheta = \frac{\pi}{7}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} s &= \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \vartheta} \\ T &= \frac{\sin 3\vartheta}{\sin \vartheta} \end{aligned}$$

miatt megkaptuk a

$$\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{3\pi}{7}} = 1$$

összefüggést is, ami másképpen írva:

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$$

Szavakkal: $\sin \frac{2\pi}{7}$ és $\sin \frac{3\pi}{7}$ harmonikus közepe pontosan $2 \sin \frac{\pi}{7}$.