Haladvány Kiadvány 2013.05.29

Gyökösszegek éles felső becslése

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Bizonyítjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k} \le \frac{4n^3+3n-1}{6}$$

Azt is megmutatjuk, hogy csak $n=1$ esetén van egyenlőség.

Jelölje a bal oldalt a_n, a jobb oldalt pedig b_n. Az $n = 1,2,...,7$ eseteket a következő táblázat mutatja:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1.00	6.15	19.31	44.47	85.63	146.80	231.96
b_n	1.00	6.67	19.33	44.50	85.67	146.83	232.00

Az $n \ge 8$ esetekre pedig a következő bizonyítást adjuk: Tekintsük a koordinátarendszerben azt a konvex sokszöget, mely a következő pontok konvex burka: $(1;1)$; $(1;0)$; $(n^2+1;0)$; továbbá $k=1,2,...,n^2$ esetén a $(k+1;\sqrt{k})$. Ezen n^2+3 pont konvex burka természetes módon felbontható n^2 darab téglalapra és n^2-1 darab derékszögű háromszögre a következő módon definiálva a téglalapokat illetve a háromszögeket: a k indexű téglalap átellenes csúcsai: $(k;0)$ és $(k+1;\sqrt{k})$, ahol $k=1,2,...,n^2$. A k indexű háromszög csúcsai: $(k;\sqrt{k})$, $(k+1;\sqrt{k})$ és $(k+1;\sqrt{k+1})$, ahol $k=1,2,...,n^2-1$. A háromszögek összerülete nyilván $\frac{n-1}{2}$. A k indexű téglalap területe $\sqrt{k}$. Mivel az összesen $2n^2-1$ darab téglalap illetve háromszög mindegyike az $y=\sqrt{x}$ függvénygörbe, az x-tengely, az $x=1$ egyenes és az $x=n^2+1$ egyenes között van, azért

$$a_n + \frac{n-1}{2} < \int_1^{n^2+1} \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\left(n^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

azaz

$$6a_n + 3n + 1 < 4\left(n^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

Most az $m = n - 8$ jelöléssel élve belátjuk, hogy

$$4\left(n^2+1\right)^{\frac{3}{2}} < 4n^3 + \frac{30n+1}{5}$$

azaz hogy

$$20\left(n^2+1\right)^{\frac{3}{2}} < 20n^3 + 30n + 1$$

Valóban,

$$\begin{aligned} & \left(20n^3+30n+1\right)^2 - 400\left(n^2+1\right)^3 \\ = & \left(20(m+8)^3+30(m+8)+1\right)^2 - 400\left((m+8)^2+1\right)^3 \\ = & 40m^3 + 660m^2 + 2940m + 1361 \end{aligned}$$

Ez tehát $n \geq 8$ esetén pozitív. Ott tartunk, hogy

$$6a_n + 3n + 1 < 4n^3 + \frac{30n+1}{5}$$

azaz átrendezéssel

$$a_n < \frac{20n^3+15n-4}{30}$$

De nem ezt kellett bizonyítanunk, hanem egy kissé erősebb állítást, hiszen

$$\frac{20n^3+15n-4}{30} - \frac{4n^3+3n-1}{6} = \frac{1}{30}$$

Kissé pontosabb becslést kellene adnunk az $n \geq 8$ esetben! Az első 35 téglalap és első 35 háromszög esetében például

$$\int_1^{36} \sqrt{x}\ dx = \frac{430}{3} \approx 143.33333$$

értéket számoltunk a felső becslésben a 35 téglalap és 35 háromszög területösszege helyett, ami egészen pontosan

$$\left(\sum_{k=1}^{35} \sqrt{k}\right) + \frac{\sqrt{36}-1}{2} \approx 143.29906$$

Most már készen vagyunk, hiszen

$$\frac{430}{3} - \frac{1}{30} - \left(\sum_{k=1}^{35} \sqrt{k}\right) - \frac{\sqrt{36}-1}{2} \approx 0.00094$$