Ferde fényképezés

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

June 18, 2015

Haladvány Kiadvány, 2015.
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm/150619.pdf

Legtöbbször nem tudjuk a téglalap alakú képet vagy feliratot "szemből" lefényképezni (túl magasan van, tükröződik az üveg vagy a vaku, nem állhatunk fel helyünkről, csak hirtelen elkaptuk, stb.), aminek eredményeképpen csak egy általános négyszög lesz a fényképen, felismerhetetlen betűkkel vagy műalkotással.

Ha tudnánk (lemértük volna) a tárgy- és képsíkok és az objektív helyét, akkor persze könnyűszerrel meg tudnánk szerkeszteni *visszafelé* a fénysugarak útját ... , de csak egy torz ("általános") négyszöget látunk a képen. *Fotogrammetria* és *homográfia* címszó alatt bizonyára már régóta ismert ennek a problémának a megoldása, de meglepő módon ennek részleteit a szakirodalomban *sehol sem találtam* (pl. [2], [4]-[7]). Ezért kénytelen voltam magam kiszámolni, és alább röviden közzéteszem két megoldásomat.

1 Egy térbeli megoldás

Önkéntelenül is kezünket nyújtogatva, a fényképet és fejünket csavargatva keressük a legjobb nézőpontot, tehát "kézenfekvő" a következő térbeli megoldás.

Jelölések és adatok

A fényképen levő általános négyszög csúcsait az A, B, C, D (egysíkú) pontok jelölik, szemünk az O pontban van (O nem feltétlenül az origó), a látott (keresett eredeti) téglalap (vagy paralelogramma?) csúcsai pedig A', B', C', D'. A fénykép tetszőleges pontja P, látott képe P', vagyis az OAA', ... , OPP' pontok egyenesekre illeszkednek.

Legyen $O = \underline{0} = (0,0,0)$, és tegyük fel, hogy az adott A, B, C, D pontokra teljesül, hogy: $A = \overrightarrow{OA} = \underline{a} = (a_1, a_2, 1)$, $B = \overrightarrow{OB} = \underline{b} = (b_1, b_2, 1)$, $C = \overrightarrow{OC} = \underline{c} = (c_1, c_2, 1)$, $D = \overrightarrow{OD} = \underline{d} = (d_1, d_2, 1)$ egy síkbeli konvex, nem elfajuló négyszög (semelyik három pont sem esik egy egyenesbe), a négyszög egy körüljárása A, B, C, D. Az $[A, B, C, D]$ képsíkot jelöljük $\mathcal{S}$ -el.

Paralelogramma

Első lépésben az A, B, C, D négyszöget paralelogrammává alakítjuk. Forgatjuk kezünkben a fényképet, ami azt jelenti, hogy egy olyan $\mathcal{S}'$ síkot keresünk, amelyen a látott $A'B'C'D'$ négyszög már paralelogramma.

Technikailag azonban a számításokat úgy tudjuk könnyen elvégezni, ha olyan α , β , γ , δ számokat keresünk, amelyekre az $A' = \alpha\underline{a}$, $B' = \beta\underline{b}$, $C' = \gamma\underline{c}$, $D' = \delta\underline{d}$ térbeli pontok esetén

$$A'B'C'D' \text{ paralelogramma.} \tag{1}$$

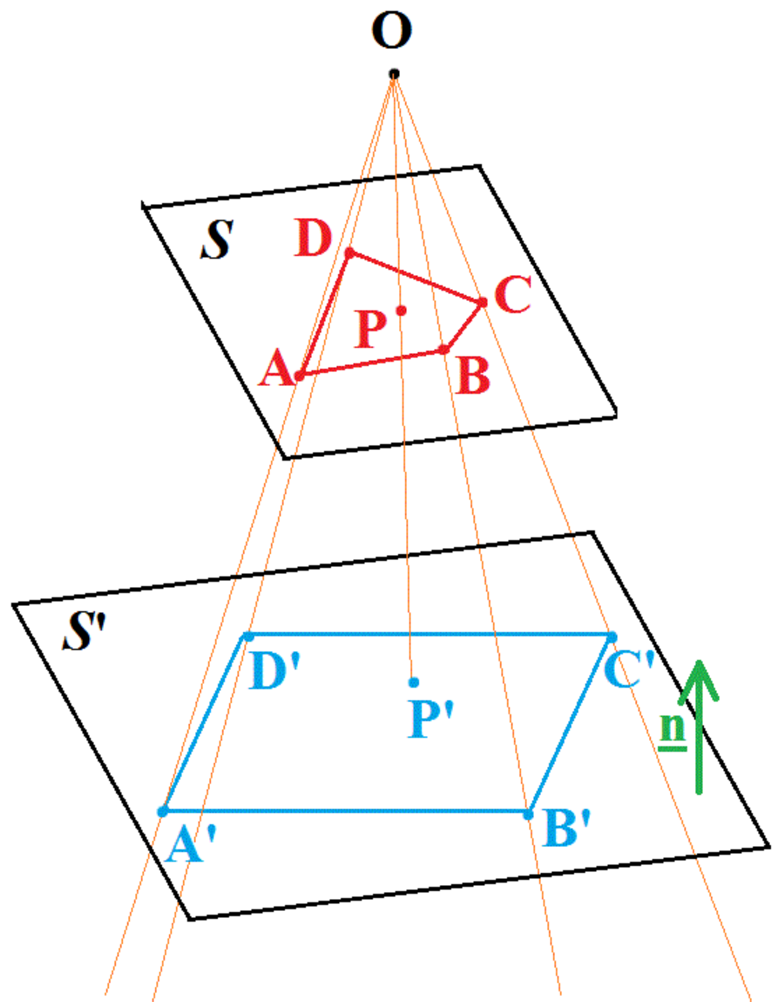
A fenti követelmény azt is jelenti, hogy az A', B', C', D' pontok egy síkba esnek, az $[A', B', C', D']$ síkot jelöljük $\mathcal{S}'$ -el. (A téglalapot a "Téglalap" bekezdésben fogjuk megkapni.)

Az (1) kívánság pontosan akkor teljesül, ha

$$\delta\underline{d} + \beta\underline{b} = \gamma\underline{c} + \alpha\underline{a} \ ,$$

vagyis

$$\delta\underline{d} + \beta\underline{b} - \gamma\underline{c} = \alpha\underline{a} \ . \tag{2}$$



1.ábra: *Az $A'B'C'D'$ paralelogramma szerkesztése*

Mivel az $ABCD$ négyszög nem elfajuló, ezért a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak ($\mathbb{R}^3$ -ban), ezért a (2) egyenletnek *pontosan egy* megoldása van az β, γ, δ ismeretlenekre, bármely α esetén. (Tehát a továbbiakban feltehetnénk, hogy $\alpha = 1$, de mi inkáb csak α -t írunk, az Olvasó választhat.)

β, γ, δ meghatározása a (2) egyenletrendszerből szokásos feladat, nem részletezzük. Csupán azt jegyezzük meg, hogy ezentúl β, γ és δ *nem* tetsző-leges együtthatók, hanem a (2) egyenlet (egyetlen, α -tól függő) megoldásai.

A paralelogramma szögei

A fentiekből következik, hogy az $A'B'C'D'$ paralelogramma nem feltétlenül téglalap, szögeit a fenti számolással nem tudjuk *megváltoztatni*. Ezt a problémát nemsokára megoldjuk, de hogyan lehet ellenőrizni az $A'B'C'D'$ paralelogramma szögeit? Tudjuk, hogy $D'A'B'\measuredangle$ pontosan akkor derékszög, ha az $\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{A'B'}$ *skaláris szorzat* 0 , vagyis

$$(\delta \underline{d} - \alpha \underline{a}) \cdot (\beta \underline{b} - \alpha \underline{a}) = 0 \tag{3}$$

(ahol persze $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.)

Két lehetőségünk van az eredeti kép visszaállítására, vagyis egy $A"B"C"D"$ téglalap előállítására.

Mivel mindkét módszer igényli az $\mathcal{S}$ sík P pontjainak leképezését az $\mathcal{S}'$ síkra, és a P' képpontoknak az $A'B'C'D'$ paralelogrammában elfoglalt helyeit, ezért először ezekkel foglalkozunk. Ezek a térgeometriában (lineáris algebrában) jól ismert problémák, most csak röviden írjuk le a számolásokat.

A P pontok

Az $\mathcal{S}$ sík pontjai $P = (p_1, p_2, 1)$ alakúak, az $O = (0, 0, 0)$ középpontú centrális vetítés miatt a $P' \in \mathcal{S}'$ pontra teljesül, hogy $\overrightarrow{OP'} = t \cdot \overrightarrow{OP}$, vagyis

$$P' = (tp_1, tp_2, t) \tag{4}$$

valamely $t \in \mathcal{R}$ számra. A t számot kell meghatároznunk, ehhez pedig az $\mathcal{S}'$ sík egyenlete kell.

Az S' sík

Az $\mathcal{S}'$ sík egy normálvektora például

$$\underline{n} = \overrightarrow{A'D'} \times \overrightarrow{A'B'} = (\delta \underline{d} - \alpha \underline{a}) \times (\beta \underline{b} - \alpha \underline{a})$$

vektoriális szorzat, részletesebben

$$= \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \delta d_1 - \alpha a_1 & \delta d_2 - \alpha a_2 & \delta - \alpha \\ \beta b_1 - \alpha a_1 & \beta b_2 - \alpha a_2 & \beta - \alpha \end{bmatrix} = n_1 \cdot \underline{i} + n_2 \cdot \underline{j} + n_3 \cdot \underline{k} \tag{5}$$

ahol

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \quad (\delta d_2 - \alpha a_2) \cdot (\beta - \alpha) - (\beta b_2 - \alpha a_2) \cdot (\delta - \alpha) \\
n_2 &= -(\delta d_1 - \alpha a_1) \cdot (\beta - \alpha) + (\beta b_1 - \alpha a_1) \cdot (\delta - \alpha) \\
n_3 &= \quad (\delta d_1 - \alpha a_1) \cdot (\beta b_2 - \alpha a_2) - (\delta d_2 - \alpha a_2) \cdot (\beta b_1 - \alpha a_1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

és természetesen $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Legyen az $\mathcal{S}'$ sík egy fixpontja A', ekkor az $\mathcal{S}'$ sík egyenlete

$$
n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot \alpha a_1 + n_2 \cdot \alpha a_2 + n_3 \cdot \alpha = N \ . \tag{7}
$$

A P pontok képei

$P' \in \mathcal{S}'$ pontosan akkor teljesül, ha P' kielégíti a fenti egyenletet, vagyis (4) alapján

$$
n_1 \cdot tp_1 + n_2 \cdot tp_2 + n_3 \cdot t = N \ ,
$$

ahonnan

$$
t = \frac{N}{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3} \tag{8}
$$

és (4) megadja P' koordinátáit.

A P' pont helye a paralelogrammában

A $P' = (tp_1, tp_2, t)$ pont tehát az $\mathcal{S}' = [A'B'C'D']$ síkon van, melynek egy bázisa $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{A'B'}$, ami azt jelenti, hogy az alábbi egyenletrendszernek

$$
\overrightarrow{A'P'} = \mu \cdot \overrightarrow{A'B'} + \nu \cdot \overrightarrow{A'D'}
$$

azaz a

$$
P' - \alpha \underline{a} = \mu \left(\beta \underline{b} - \alpha \underline{a} \right) + \nu \left(\delta \underline{d} - \alpha \underline{a} \right) \tag{9}
$$

egyenletrendszernek a μ és ν ismeretlenekre egyértelmű megoldása van. A μ, ν számok egyébként a P' pont koordinátái az $\overrightarrow{A'D'}$ és $\overrightarrow{A'B'}$ vektorok által kifeszített *ferdeszögű* (*klinogonális*) koordinátarendszerben.

Téglalap

Most pedig nézzük meg, hogyan lehet az "$A'B'C'D'$ nem téglalap" problémát megoldani.

I. Módszer

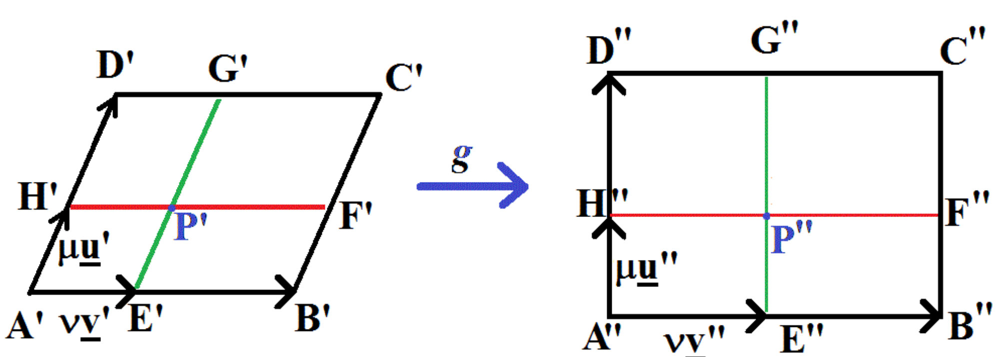
A nézőpont, vagyis az origó megváltoztatásával megpróbáljuk beállítani az $A'B'C'D'$ paralelogramma szögeit derékszögekre. Ez azt jelenti, hogy az $\underline{0} = (0,0,0)$ pont helyett keressünk egy $(0, x_0, y_0)$ pontot az O nézőpont helyett. Ugyanezt érhetjük el, kicsit kényelmesebben, ha az O pontot meghagyjuk az eredeti $(0,0,0)$ helyén, és helyette az A, B, C, D pontokat módosítjuk a $\underline{\chi} := (0, -x_0, -y_0)$ vektorral, vagyis legyenek $\underline{A^\chi} := \underline{A} + \underline{\chi}$, ... , $\underline{D^\chi} := \underline{D} + \underline{\chi}$, és keressünk egy olyan $\underline{\chi}$ vektort, melyre az $\underline{A^{\chi\prime}}$, $\underline{B^{\chi\prime}}$, $\underline{C^{\chi\prime}}$, $\underline{D^{\chi\prime}}$ paralelogramma téglalap, vagyis a (3) egyenlőség teljesül.

Ezután persze az eddigi, (1)-(9) számolásokat mind újra kell számolnunk.

II. Módszer

Nem követeljük meg, hogy az $A'B'C'D'$ paralelogramma téglalap legyen. Mivel a (9) egyenletben már meghatároztuk μ és ν értékét *tetszőleges* $P' \in \mathcal{S}'$ pontra, ezért rögzítsünk a papírunkon (egy $\mathcal{S}$" síkon) két tetszőleges merőleges vektort, mondjuk $\overrightarrow{A"D"}$, $\overrightarrow{A"B"}$, és ekkor legyen a $P" \in \mathcal{S}"$ pont a következő:

$$\overrightarrow{A"P"} := \mu \cdot \overrightarrow{A"D"} + \nu \cdot \overrightarrow{A"B"} \ . \tag{10}$$



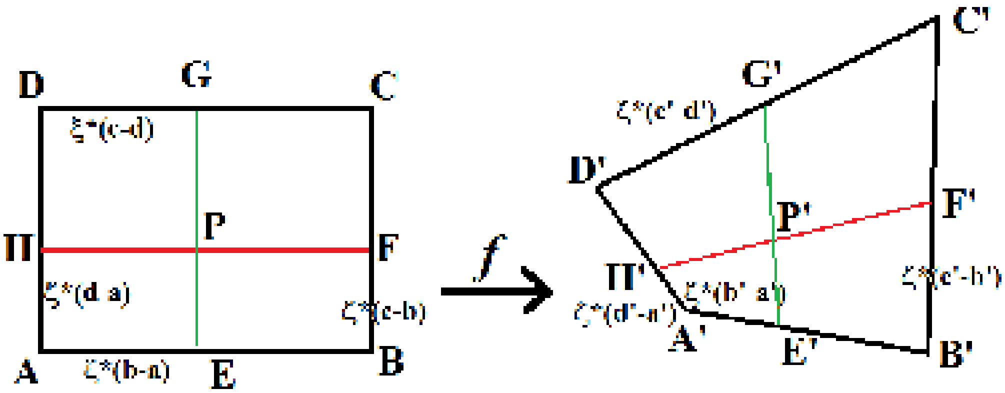
2.ábra: *Az $A"B"C"D"$ téglalap szerkesztése*

Az $\overrightarrow{A"D"}$, $\overrightarrow{A"B"}$ vektorok hosszainak változtatásával beállíthatjuk (kijavíthatjuk) a keresett kép függőleges-vízszintes torzítását, amihez már használhatjuk például Hosszú Ivett [3] szakdolgozatának programját is.

Ne feledjük azonban, hogy az eredeti $A"B"C"D"$ téglalap alakú kép oldalainak *arányát* az $ABCD$ fényképből semmilyen módon nem lehet meghatározni - ezt csak emlékeinkből, vagy más adatból kell meghatároznunk!

2 Közvetlen számolás

Következő módszerünk kevésbé "életszerű". Azon a matematikai észrevételen (**Tételen**) alapul, hogy a fényképezéskor keletkezett torzítás *egyenes-* és *aránytartó.*



3.ábra: *Az $A'B'C'D'$ fénykép keletkezése*

Ez azt jelenti, hogy például az eredetileg egy egyenesen levő AEB pontok $A'E'B'$ képei is egy egyenesen lesznek, sőt a megfelelő szakaszok aránya is megmarad: $\frac{AE}{EB} = \frac{A'E'}{E'B'}$, és ez természetesen bármely három, egy egyenesen levő pontra is igaz.

A fényképezés (leképezés)

A kapott f transzformáció tehát síkbeli, a kétdimenziós $[x, y]$ síkon vagyunk. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, ...$ helyvektorokat azonosítjuk a síkbeli pontokkal: $A = \underline{a} = \overrightarrow{OA}$,

$B = \underline{b} = \overrightarrow{OB}$, ... , a megfelelő koordinátáik (a_1, a_2), ... , az origó most nem érdekes.

Ha ismertek az $ABCD$ téglalap és az $A'B'C'D'$ tetszőleges négyszög, keresendő a fényképezéskor kapott

$$f : ABCD \longrightarrow A'B'C'D' \tag{11}$$

geometriai transzformáció. (f megfordítását a következő alfejezetben keressük meg.) Legyen

$$P = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AH} = \xi \cdot (\underline{b} - \underline{a}) + \zeta \cdot (\underline{d} - \underline{a}) = HF \cap EG\ ,$$

ekkor hol van P' ?   Az arány- és egyenestartás miatt

$$P' = H'F' \cap E'G'\ ,$$

ahol $E' = \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}')$, $H' = \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}')$, ... , vagyis

$$\begin{aligned} P' &= A' + \underline{r}' = A' + \underline{s}' = \\ &= \underline{a}' + \underline{r}' = a' + \underline{s}' \end{aligned} \tag{12}$$

ahol

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \overrightarrow{A'E'} + \zeta \cdot \overrightarrow{E'G'} = \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot \left[\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'G'} - \overrightarrow{A'E'}\right] \\ &= \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot [\underline{d}' - \underline{a}' + \xi \cdot (\underline{c}' - \underline{d}') - \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}')] \\ &= \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}') + \zeta\xi \cdot [\underline{c}' - \underline{d}' - \underline{b}' + \underline{a}'] \end{aligned} \tag{13}$$

és

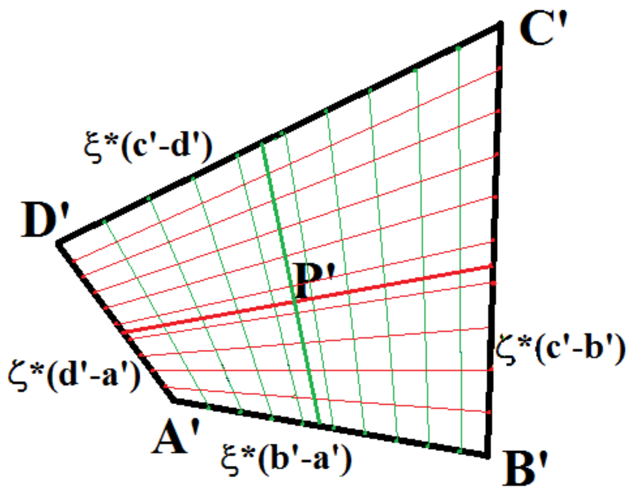
$$\begin{aligned} \underline{s} &= \overrightarrow{A'H'} + \xi \cdot \overrightarrow{H'F'} = \zeta \cdot (d' - a') + \xi \cdot \left[\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'F'} - \overrightarrow{A'H'}\right] \\ &= \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot [(\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot (\underline{c}' - \underline{b}') - \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}')] \\ &= \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta\xi \cdot [\underline{c}' - \underline{b}' - \underline{d}' + \underline{a}']\ . \end{aligned} \tag{14}$$

A leképezés megfordítása

Mint a cikk legelején írtuk, bennünket nem f , hanem a megfordítása: f^{-1} érdekel:

$$f^{-1} : ABCD \longleftarrow A'B'C'D' \tag{15}$$

vagyis adott P' esetén hol van P' ? Ehhez "mindössze" csak annyit kell tennünk, hogy az $A'B'C'D'$ négyszögben (fényképen) levő P' ponthoz meghatározzuk a ξ és ζ együtthatókat, amik a 3. ábra szerint az eredeti téglalapbeli P pont koordinátái. Grafikusan (kézzel) ez nagyon egyszerű: az $A'B'C'D'$ négyszög oldalait *ugyanannyi* (mondjuk 10^k) részre felosztjuk, a megfelelő osztópontokat összekötve máris kész a "*csálé koordinátarendszer*" :



4.ábra: *Az $A'B'C'D'$ fénykép koordinátázása*

Ha nem rajz házifeladatot kell elkészítenünk, akkor számolunk. A (13) és (14) egyenletekben szereplő nemlineáris egyenletrendszerek ξ, ζ -re nem (könnyen) oldhatók meg.

Helyette tekintsük a

$$\overrightarrow{P'F'} \parallel \overrightarrow{H'F'} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{P'G'} \parallel \overrightarrow{E'G'} \tag{16}$$

összefüggéseket, vagyis

$$\det\left(\overrightarrow{P'F'}, \overrightarrow{H'F'}\right) = 0 \quad \text{és} \quad \det\left(\overrightarrow{P'G'} \parallel \overrightarrow{E'G'}\right) = 0\ . \tag{17}$$

Részletesebben:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P'F'} &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'F'} - \overrightarrow{A'P'} \\
&= (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot (\underline{c}' - \underline{b}') - \big(\underline{p}' - \underline{a}'\big) \\
&= \big(\underline{b}' - \underline{p}'\big) + \zeta \cdot (\underline{c}' - \underline{b}') = \big(\underline{b}' - \underline{p}'\big) + \zeta \cdot \underline{k}' \ , \qquad (18)
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{H'F'} &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'F'} - \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}') \\
&= (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot (\underline{c}' - \underline{b}') - \zeta \cdot (\underline{d}' - \underline{a}') \\
&= (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot (\underline{c}' - \underline{b}' - \underline{d}' + \underline{a}') = (\underline{b}' - \underline{a}') + \zeta \cdot \underline{\ell}'
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\underline{k}' = (\underline{c}' - \underline{b}') \quad \text{és} \quad \underline{\ell}' = (\underline{c}' - \underline{b}' - \underline{d}' + \underline{a}') \ ,
$$

ahonnan

$$
\det \begin{bmatrix} b_1' - p_1' + \zeta \cdot k_1' & b_1' - a_1' + \zeta \cdot \ell_1' \\ b_2' - p_2' + \zeta \cdot k_2' & b_2' - a_2' + \zeta \cdot \ell_2' \end{bmatrix} = 0 \qquad (19)
$$

vagyis

$$
\alpha \cdot \zeta^2 + \beta \cdot \zeta + \gamma = 0 \qquad (20)
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\alpha &= k_1' \ell_2' - k_2' \ell_1' \\
\beta &= (b_1' - p_1')\, \ell_2' + k_1' \,(b_2' - a_2') - (b_2' - p_2')\, \ell_1' + k_2' \,(b_1' - a_1') \\
\gamma &= (b_1' - p_1')\,(b_2' - a_2') - (b_2' - p_2')\,(b_1' - a_1') \ , \qquad (21)
\end{aligned}
$$

ahonnan ζ megkapható, és $0 \le \zeta \le 1$ amennyiben P' az $A'B'C'D'$ négyszög belsejében van.

ξ hasonlóan számolható ki:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P'G'} &= \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'G'} - \overrightarrow{A'P'} \\
&= (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot (\underline{c}' - \underline{d}') - \big(\underline{p}' - \underline{a}'\big) \\
&= \big(\underline{d}' - \underline{p}'\big) + \xi \cdot (\underline{c}' - \underline{d}') = \big(\underline{d}' - \underline{p}'\big) + \xi \cdot \underline{m}' \ ,
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E'G'} &= \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'G'} - \overrightarrow{A'E'} \\
&= (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot (\underline{c}' - \underline{d}') - \xi \cdot (\underline{b}' - \underline{a}') \\
&= (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot (\underline{c}' - \underline{d}' - \underline{b}' + \underline{a}') = (\underline{d}' - \underline{a}') + \xi \cdot \underline{n}'
\end{aligned}
$$

ahol
$$\underline{m}' = (\underline{c}' - \underline{d}') \quad \text{és} \quad \underline{n}' = (\underline{c}' - \underline{d}' - \underline{b}' + \underline{a}')\ ,$$
ahonnan
$$\det\begin{bmatrix} d_1' - p_1' + \xi \cdot m_1' & d_1' - a_1' + \xi \cdot n_1' \\ d_2' - p_2' + \xi \cdot m_2' & d_2' - a_2' + \xi \cdot n_2' \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$
vagyis
$$\delta \cdot \xi^2 + \varepsilon \cdot \xi + \mu = 0 \tag{23}$$
ahol
$$\begin{aligned} \delta &= m_1'n_2' - m_2'n_1' \\ \varepsilon &= (d_1' - p_1')\,n_2' + (d_2' - a_2')\,m_1' - (d_1' - a_1')\,m_2' - (d_2' - p_2')\,n_1' \\ \mu &= (d_1' - p_1')\,(d_2' - a_2') - (d_2' - p_2')\,(d_1' - a_1')\ , \end{aligned} \tag{24}$$
ahonnan ξ megkapható, és $0 \le \xi \le 1$ amennyiben P' az $A'B'C'D'$ négyszög belsejében van.

3 Hivatkozások

[1] **Dobos Sándor, Hraskó András, Kiss Géza, Surányi László:** *Geometria* (11–12. évfolyam), 2011,
http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf

[2] **Nyugat Magyarországi Egyetem oktatói:** *Fotogrammetria*, 2010,
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_FOT*/adatok.html
ahol * helyett 1 és 17 közötti egész számok lehetnek,

[3] **Hosszú Ivett:** *Lineáris és nemlineáris transzformációk szemléltetése számítógéppel*, Pannon Egyetem Szakdolgozat, 2013,
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/HosszuIvett.zip (~30Mb)

[4] https://github.com/ramsrigouthamg/codes_public/tree/master/opencv/homography

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Fotogrammetria

[6] https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordináta-rendszer

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Homography