Haladvány Kiadvány (szerk.Hujter Mihály)
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm , *2015.07.20.*
http://www.math.bme.hu/~hujter/150720.pdf

dr. Szalkai István: *Ki fedezte fel ?*

szalkai@almos.uni-pannon.hu

Az emberi természetet ismerve talán nem meglepő, hogy nagyon sok matematikai tételt nem arról a személyről neveztek el, aki az összefüggést feltalálta. Jelen összeállításunk csak egy rövid ízelítőt ad a témából, az Olvasó számtalan hasonló esetet találhat (ld. pl. *Luoma* [1] írását, a [2] honlapot vagy *Sain Márton* [3],[4] műveit, stb.).

A listát nem a legismertebb esetekkel kezdjük, a szükséges matematikai ismeretekre csak szűkszavúan utalunk, kezdőknek a *Wikipédiát* ajánlhatjuk.

[1] **Luoma,K.:** *What's in a name?*, The Math. Gazette, vol 80 (1996), 297, 349-351.
[2] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/
[3] **Sain Márton:** *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, 1977.
[4] **Sain Márton:** *Nincs királyi út!* (A matematika története), Gondolat, 1986,
http://mek.oszk.hu/05000/05052/index.phtml

1. A Cramer szabály

Most nem a lineáris egyenletrendszerek determinánssal történő megoldásáról van szó (azt valóban Cramer találta fel), hanem a következő tételekről:

1. Tétel: Bármely $F(x,y) = \sum_{i+j\leq n} a_{i,j}x^i y^j = 0$, n -edfokú algebrai görbében $n\cdot(n+3)/2$ együttható adható meg szabadon, vagyis legfeljebb $n\cdot(n+3)/2$ pontját írhatjuk elő a görbének, mert a görbét (tetszőleges) $n\cdot(n+3)/2$ pont egyértelműen meghatározza.

Példa: A kúpszeletek esetében n=2, és tudjuk, hogy $n\cdot(n+3)/2 = 5$ pont egyértelműen megadja a kúpszeletet ($F(x,y)=a_{0,0}+a_{1,0}\cdot x+a_{0,1}\cdot y+a_{1,1}\cdot x\, y+a_{2,0}\cdot x^2+a_{0,2}\cdot y^2 =0$).

2. Tétel: Egy n -edfokú és egy m -edfokú egyenletből álló egyenletrendszernek mn metszéspontja (megoldása) van.

Paradoxon (látszólagos ellentmondás): m=n=3 esetén tehát két köbös egyenletnek, vagyis két harmadrendű görbének mn=9 metszéspontja van, de az 1.Tétel szerint n=3 esetén már $n\cdot(n+3)/2$ =9 pont egyértelműen meghatározza a harmadfokú görbéket!

Nos, [1] és [2] szerint nem *Gabriel Cramer* (1704-1752) volt az első, aki ezeket a tételeket és a paradoxont ismerte, többek között már *Colin MacLaurin* (1698-1746) könyvében is szerepel.

[5] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Cramer.html
[6] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Maclaurin.html

2. A Gauss elimináció ("*kiküszöbölés*")

Többismeretlenes, több egyenletből álló lineáris egyenletrendszerek középiskolai ismeretekkel történő megoldása: az egyenleteket többször egymás után, egymásból kivonva a legutoljára kapott egyenletben már csak minimális számú ismeretlen szerepel. Ezen ismeretleneket egy kivétellel tetszőlegesen ("paraméternek") választhatjuk, és belőlük a többi ismeretlent már kifejezhetjük, figyelembe véve a többi egyenletet is (pl. [7]).

Meglepő módon ezt az eljárást Carl Friedrich Gauss (1777-1855) előtt már *Qin Jiushao,* más néven *Jiuzhang* vagy *Chin Chiu-Shao* (1202-1261) kínai matematikus is leírta a XIII. század elején ([1],[8]).

[7] https://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-elimin%C3%A1ci%C3%B3 , azaz
https://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-elimináció
[8] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qin_Jiushao.html

3. A Horner -elrendezés

Polinom helyettesítési értékének gyors kiszámolására még a számítógépek is használják, a módszer a

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 =$$

$$= ((\ldots(((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + a_{n-3}) \cdot x + \ldots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

átalakításon alapul ([9],[10]).

Azonban az eljárást *William George Horner* (1786-1837) előtt már a XIII. század közepén *Zhu Shijie*, más néven *Chu Shih-Chieh* (1260-1320) kínai matematikus is leírta ([11],[12]).

[9] https://hu.wikipedia.org/wiki/Polinom#Helyettes.C3.ADt.C3.A9si_.C3.A9rt.C3.A9k_kisz. C3.A1m.C3.ADt.C3.A1sa_.E2.80.93_Horner-m.C3.B3dszer , azaz
https://hu.wikipedia.org/wiki/Polinom#Helyettesítési érték kiszámítása – Horner-módszer
[10] http://mathworld.wolfram.com/HornersMethod.html
[11] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Horner.html
[12] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie.html

4. A L'Hopital szabály

Tétel: Bizonyos feltételek esetén $\lim\limits_{x \to A} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to A} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (pl. [13]).

L'Hospital (teljes neve *Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpital, Marquis de Sainte Mesme, Comte d'Entremont and Seigneur d'Ouques-la-Chaise*, 1661-1704) katonatiszt csak érdeklődésből járt *Johann Bernoulli*hoz (1667-1748) matematika órákra, és könyvében a fenti tétel szerzőjeként tanárát, Bernoullit tünteti fel (pl.[14],[15]).

[13] **Szalkai István, Koltay László**: *Analízis feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2009.
[14] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_L'Hopital.html
[15] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html

5. A Pascal - háromszög

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

. . . . . .

Mindenki ismeri**.** Lehet, hogy Blaise Pascal (1623-1662) volt az első, aki a fenti táblázatot sokoldalúan tanulmányozta, de már a XI-XII. századok elején *Xian Jia* (kb.1010-1070) kínai és *Al Samawal* (kb.1130-1180) arab matematikusok munkáiban már megtaláljuk, alkalmazásokkal együtt! ([16]-[18])

[16] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal.html
[17] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jia_Xian.html
[18] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Samawal.html

6. A Pell-egyenletek

Az $y^2 = ax^2 + 1$ Diophantikus egyenletről van szó, ahol *a* adott egész szám, és keresendő az összes egész *x,y* megoldás. Az egyenletet Leonhard Euler (1707-1783) nevezte el John Pell-ről (1611-1685), de az egyenlet már *Brahmagupta* (598-670) és *Bhaskara* (1114-1185) munkáiban is megjelent, a probléma teljes megoldását *Joseph-Luis Lagrange* (1736-1813) adta meg ([19]-[23]).

[19] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pell.html
[20] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Brahmagupta.html
[21] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Bhaskara_II.html
[22] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html
[23] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html

7. Pitagorasz tétele

Első, általános és precíz megfogalmazása és bizonyítása *Euklidesz* (Kr.előtt kb. 325-265) "Elemek" művében található ([24],[25]), a tételt *Pitagorasznak* (Kr.előtt kb. 569-475) tulajdonítja. De már több, mint 1000 évvel (!) korábbi *Babilóniai* agyagtáblákon is találtak Pitagoraszi számhármasokat és derékszögű háromszögeket ([1],[26]).

[24] http://mek.oszk.hu/06200/06232
[25] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html
[26] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html

8. A Simpson -szabály

Függvénygörbe alatti terület, vagyis a határozott integrál közelítő (numerikus) kiszámításához használt képlet ([27],[28]):

$$T = \int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{j=1}^{m} t_j^{(parabola)} =$$

$$= \frac{b-a}{3n} \cdot \left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b) \right)$$

$$ahol \qquad x_0 = a \quad \text{és} \quad x_i = x_{i-1} + \frac{b-a}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ .$$

A képletet *Thomas Simpson* (1710-1761) 1743-ban megjelent könyvében találhatjuk ([29]), de előtte már *James Gregory* (1638-1675) 1668-beli könyvében is szerepel (természetesen bizonyítással, [30]).

[27] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis*, 2011, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/ adatok.html

[28] **Szalkai István, Mikó Teréz**: *A közgazdaságtan matematikai alapjai*, 2011, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf

[29] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Simpson.html

[30] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory.html

9. A Taylor -sor

Nehezen kiszámítható függvényeket közelíthetünk polinomokkal:

$$f(x) \approx a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

ahol az a_i együtthatók az f függvény deriváltjaiból (könnyen) meghatározhatók, a közelítés hibáját is megadja a "Lagrange-féle hibatag" elnevezésű képlet ([27],[28],[23]).

A fenti közelítő képlet *Brook Taylor* (1685-1731) könyvében jelenik meg, de kb. 30 évvel korábban már *James Gregory* (1638-1675) is ismerte ([30],[31]). [1] szerint a formula egyszerűbb formája már az 1500-as években Indiában is ismert volt.

[31] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor.html

10. Kuratowski tétele

Tétel: Egy tetszőleges gráf akkor és csak akkor rajzolható síkba, ha nem tartalmaz sem a K_5 sem a $K_{3,3}$ gráffal homeomorf részgráfot ([32],[33]).

A tételt valóban *Kazimierz Kuratowski* (1896-1980) bizonyította be és publikálta először 1930-ban, de tőle függetlenül *Frink* és *Smith* német matematikusok is felfedezték és bebizonyították, csak pár hónappal később. Az elsőbbség Kuratowski-t illeti, a többiekete a feledés homálya ([32],[34]).

Megemlítjük még, hogy "homeomorf részgráf" fogalma a gyakorlati alkalmazásoknál nem a legegyszerűb, könnyeben használható *Klaus Wagner* (1910-2000) megfogalmazása "minorokkal" ([33],[35]) vagy [32] megfogalmazása "pontdiszjunkt utakkal".

[32] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Pannon Egyetemi Kiadó, 2000.

[33] https://hu.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADkbarajzolhat%C3%B3_gr%C3%A1f azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Síkbarajzolható_gráf

[34] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kuratowski.html

[35] https://en.wikipedia.org/wiki/Klaus_Wagner

11. Az Abel - Ruffini - Bolyai János tétel

Tétel: $n \geq 5$ esetén az

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

ún. n -edfokú algebrai egyenletekre nincs általános megoldóképlet.

Annyi közismert ([36]), hogy *Niels Henrik Abel* (1802-1829) norvég matematikus 1824-ben (saját költségén) kiadott hatoldalas füzetecskéjében bebizonyította az n=5 esetet, melyben megemlíti *Paolo Ruffini* (1765-1822) német matematikus 1799-ben megjelent könyvének hasonló, kisebb kiegészítésre szoruló fejezetét is ([37],[38],[39]). Az általános $n \geq 5$ esetet *Évariste Galois* (1811-1832) francia matematikus bizonyította be 1829-ben ([36],[40],[41]).

Bolyai János (1802-1860) ([42],[43]) kéziratainak feldolgozása napjainkban is tart. [44] szerint már ő is észrevette és kijavította Ruffini könyvének hiányosságát,de (közismert) anyagi nehézségei miatt nem volt lehetősége eredményét közzétenni.

[36] https://hu.wikipedia.org/wiki/Megold%C3%B3k%C3%A9plet
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Megoldóképlet
[37] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abel.html
[38] https://hu.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel
[39] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ruffini.html
[40] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois.html
[41] https://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois
[42] https://hu.wikipedia.org/wiki/Bolyai_J%C3%A1nos
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Bolyai_János
[43] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolyai.html
[44] **Kiss Elemér:** *Kétszáz éve született Bolyai János*, KöMaL, 2002,
http://www.komal.hu/cikkek/bolyai200/bolyai200.h.shtml

12. A Gauss - számsík

A mai oktatásban (középiskolai, egyetemi) a komplex számok bevezetését megelőzi a (derékszögű) koordinátarendszer használata, ezért teljesen természetes a komplex számok ábrázolása a koordinátarendszerben. Bár Gauss is használta ezt az ábrázolási módot munkáiban, de ismerkedjünk meg *Bolyai János* (1802-1860) "Responsio" című, méltatlanul elfeledett művével, melyben a komplex számsík geometriai tulajdonságait vizsgálta ([42],[43],[45]).

[45] **Weszely Tibor:** *Bolyai János matematikai munkássága,* Kriterion, 1981.

13. A Cardano formula

Az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ harmadfokú egyenlet általános megoldóképletéről van szó ([36]). Eredetileg *Nicolo Fontana* (1500-1557), gúnynevén *Tartaglia* ("dadogós") olasz matematikus fedezte fel 1535 február 13-án a kora reggeli órákban ([46]). Tanítványa, *Girolamo Cardano* (1501-1576) négy évvel később elkérte mesterétől a formulát, és eskü alatt megígérte, hogy senkinek nem adja tovább a titkot. 1545-ben azonban könyvében közzétette ([46],[47],[48]).

[46] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html
[47] **Sain Márton:** *Matematikatörténeti ABC,* Tankönyvkiadó, 1977.
[48] https://hu.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

14. A Descartes - koordinátarendszer

A "vízszintes" és "függőleges" irányegyenesek már az ókori tértépeken és egyes matematikai munkákban is fellelhetők ([49],[50]), sőt *Nicole d'Oresme* (1320-1382) francia (pontosabban normann) matematikus könyvében részletesen is szerepel ([49],[51]). Mégis *René*

Descartes (1596 -1650) francia matematikus volt az, aki könyvében nagymértékben továbbfejlesztette az algebra és a geometria kapcsolatának vizsgálatát, és mint filozófus, széles körben terjesztette ezeket a "tanokat" ([49],[52],[53]). Megjegyezzük, hogy a nyugati nyelvű szakirodalomban ezt a témát a C betűnél kell keresni: *Cartesian geometry* -nak nevezik.

[49] https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordin%C3%A1ta-rendszer
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordináta-rendszer
[50] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius.html
[51] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Oresme.html
[52] https://hu.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/René_Descartes
[53] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes.html

15. A 15-ös játék

Szokás "*kombinett*" játéknak is nevezni (angolul legalább féltucat elnevezése is van).
Egy nagy négyzetben (lapos dobozban) 1-től 16-ig számozott kis négyzet van, tetszőleges sorrendben. A 16 sorszámú négyzetet kivesszük, és az így keletkezett üres helyre bármelyik szomszédját tolhatjuk, majd a vándorló üres helyre mindig valamelyik szomszédját helyezhetjük. Célunk az, hogy a 15 négyzetet sorbarakjuk ([54]-[56]).

Samuel Loyd (1841-1911) amerikai, fejtörőket gyártó "matematikus" élete végéig bizonygatta, hogy ezt a játékot ő találta ki, sőt a XIX. század végén a világot végigsöprő (számtalan szerencsétlenséggel járó) játékőrület is az ő műve. A bökkenő csak az, hogy Sam Loyd legelső, a játékkal kapcsolatos írása több, mint tíz évvel a világőrület *után* jelent meg, ráadásul a játékot kitaláló *Noyes Chapman*, New York-i postamester már 1880 -ban szabadalmaztatta a játékot! Állítólag Loyd még kortársa, *Henry Ernest Dudeney* több ötletét is eltulajdonította ([57]-[60]).

Megjegyezzük, hogy a kis négyzetek *nem mindegyik* kezdeti sorrendje esetén legetséges a szabályok szerinti sorbarendezés, csak 50% esetében - ez a száz évvel ezelőtti sok szerencsétlenség oka. Matematikailag (még laikusok által is) nagyon könnyen megállapítható bármelyik kezdő sorrendről, hogy kirakható-e avagy sem ([54],[61],[62]).

Végül a rejtvénykedvelő Olvasónak a [63] könyvet ajáljuk, melyet Sam Loyd fia adott ki apja kéziratai alapján halála után, apja nevében.

[54] https://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle
[55] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/fifteen.shtml
[56] http://www.cut-the-knot.org/books/Reviews/The15Puzzle.shtml
[57] https://en.wikipedia.org/wiki/Sam_Loyd
[58] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html
[59] https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Dudeney
[60] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dudeney.html
[61] **Szalkai István:** *Mindennapi matematika*, kézirat, 2013,
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi_mat-kivonat.pdf
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi-cl-120403.jpg
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/
[62] **Szalkai István:** *Algebra és számelmélet feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, 2005.
[63] **Sam Loyd:** *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums with Answers,*
ISBN 0-923891-78-1, http://www.mathpuzzle.com/loyd/

Irodalom

[1] **Luoma,K.:** *What's in a name?*, The Math. Gazette, vol 80 (1996), 297, 349-351.

[2] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

[3] **Sain Márton:** *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, 1977.

[4] **Sain Márton:** *Nincs királyi út!* (A matematika története), Gondolat, 1986, http://mek.oszk.hu/05000/05052/index.phtml

[5] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Cramer.html

[6] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Maclaurin.html

[7] https://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-elimin%C3%A1ci%C3%B3 , azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss-elimináció

[8] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qin_Jiushao.html

[9] https://hu.wikipedia.org/wiki/Polinom#Helyettes.C3.ADt.C3.A9si_.C3.A9rt.C3.A9k_kisz. C3.A1m.C3.ADt.C3.A1sa_.E2.80.93_Horner-m.C3.B3dszer , azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Polinom#Helyettesítési érték kiszámítása – Horner-módszer

[10] http://mathworld.wolfram.com/HornersMethod.html

[11] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Horner.html

[12] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie.html

[13] **Szalkai István, Koltay László**: *Analízis feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2009.

[14] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_L'Hopital.html

[15] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html

[16] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal.html

[17] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jia_Xian.html

[18] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Samawal.html

[19] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pell.html

[20] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Brahmagupta.html

[21] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Bhaskara_II.html

[22] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html

[23] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html

[24] http://mek.oszk.hu/06200/06232

[25] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html

[26] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html

[27] **Szalkai István**: *Szemléletes analízis*, 2011, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/ adatok.html

[28] **Szalkai István, Mikó Teréz**: *A közgazdaságtan matematikai alapjai*, 2011, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf

[29] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Simpson.html

[30] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory.html

[31] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor.html

[32] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Pannon Egyetemi Kiadó, 2000.

[33] https://hu.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADkbarajzolhat%C3%B3_gr%C3%A1f
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Síkbarajzolható_gráf

[34] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kuratowski.html

[35] https://en.wikipedia.org/wiki/Klaus_Wagner

[36] https://hu.wikipedia.org/wiki/Megold%C3%B3k%C3%A9plet
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Megoldóképlet

[37] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abel.html

[38] https://hu.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

[39] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ruffini.html

[40] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois.html

[41] https://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois

[42] https://hu.wikipedia.org/wiki/Bolyai_J%C3%A1nos
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Bolyai_János

[43] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolyai.html

[44] **Kiss Elemér:** *Kétszáz éve született Bolyai János*, KöMaL, 2002,
http://www.komal.hu/cikkek/bolyai200/bolyai200.h.shtml

[45] **Weszely Tibor:** *Bolyai János matematikai munkássága,* Kriterion, 1981.

[46] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html

[47] **Sain Márton:** *Matematikatörténeti ABC,* Tankönyvkiadó, 1977.

[48] https://hu.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

[49] https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordin%C3%A1ta-rendszer
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordináta-rendszer

[50] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius.html

[51] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Oresme.html

[52] https://hu.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
azaz https://hu.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

[53] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes.html

[54] https://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle

[55] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/fifteen.shtml

[56] http://www.cut-the-knot.org/books/Reviews/The15Puzzle.shtml

[57] https://en.wikipedia.org/wiki/Sam_Loyd

[58] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html

[59] https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Dudeney

[60] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dudeney.html

[61] **Szalkai István:** *Mindennapi matematika*, kézirat, 2013,
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi_mat-kivonat.pdf
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi-cl-120403.jpg
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/

[62] **Szalkai István:** *Algebra és számelmélet feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, 2005.

[63] **Sam Loyd:** *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums with Answers,* ISBN 0-923891-78-1, http://www.mathpuzzle.com/loyd/