Haladvány Kiadvány 2015.08.20

Dominók, trigonometria, imagináriusok és Lénárt nyulai

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Ajánlás: *Farkas Miklósné Irén* emlékére.

Köszönetnyilvánítás: Hálával tartozunk Kaszanyitzky Andrásnak, mert a dominókkal való lefedéseket figyelmünkbe ajánlotta.

Egy meglepő azonossággal kezdjük:

$$\left(1+4\sin^2 10^\circ\right)\left(1+4\sin^2 50^\circ\right)\left(1+4\sin^2 70^\circ\right)=17 \tag{1}$$

Itt az az igazán meglepő, hogy a tényezők egyike sem megszerkeszthető szám, azaz nem írható fel racionális számokból az alapműveletekkel és szükség esetén négyzetgyökjelekkel. Összehasonlításul közöljük a

$$\left(1+4\sin^2 15^\circ\right)\left(1+4\sin^2 45^\circ\right)\left(1+4\sin^2 75^\circ\right)=18 \tag{2}$$

azonosságot is. Ezen azonban már nem lepődünk meg annyira, hiszen jól ismertek, hogy

$$4\sin 15^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2};\quad \sqrt{2}\sin 45^\circ=1;\quad 4\sin 75^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Mindazonáltal a (2) azonosság könnyen igazolható. De az (1) azonosság keményebb dió!

A címben négy fogalmat említünk, de eddig még csak a trigonometriáról volt szó. Most kiugrasztjuk a nyulakat is a bokorból! A szóbahozott *Lénárt* nem más, mint *Pisa* városa tizenkettedik századi észak-afrikai kereskedelmi ügyvivőjének, bizonyos *Guglielmo* mesternek a fia. Az apa a *Bonaccio* becenevet is viselte, ami jó természetűt jelent. A *Fibonacci* név, ami a *filius Bonacci*, azaz Bonaccio fia kifejezésből ered, a tizenharmadik század első felében az európai matematika legfontosabb személyévé lett Lénártot azonosítja.

A híres *Fibonacci-számsorozat*: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$. Fibonacci 1202-ben a *Liber Abaci* (Könyv az abakuszról) című művében egy képzeletbeli nyúlcsalád növekedését adta fel gyakorlófeladatként: Hány pár nyúl lesz n hónap múlva? Feltételezzük, hogy
— az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúlpár van;
— az újszülött nyúlpárok két hónap alatt válnak termékennyé;
— minden termékeny nyúlpár minden hónapban egy újabb párt hoz világra;
— a nyulak elélnek olyan sokáig, amíg van türelmünk számolni őket.

Ha n jelöli a hónap sorszámát, jelölje F_n a nyúlpárok darabszámát. Eszméletlen sok eredmény ismert az F_n számokra! Itt most csak egyet említünk:

$$2^n\sqrt{5}\ F_n = \left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n \tag{3}$$

Következésképpen $F_n > 0.44 \cdot 1.618^n$, ha $n \geq 4$.

Kiugrasztottuk tehát a nyulakat a bokorból, de mire jó nekünk ez a rengeteg nyúl? Hát arra, hogy az F_n számokra páratlan n esetén felírjuk a következő azonosságot:

$$F_n = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(1 + 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \tag{4}$$

Ennek speciális eseteként az $n = 9$ értékre kapjuk, hogy

$$\left(1+4\cos^2 20^\circ\right)\left(1+4\cos^2 40^\circ\right)\left(1+4\cos^2 60^\circ\right)\left(1+4\cos^2 80^\circ\right) = 34$$

amiből pedig (1) rögtön kijön, hiszen $1 + 4\cos^2 60^\circ = 2$. Mivel $1 \le k \le (n-1)/2$ esetén

$$\cos\frac{k\pi}{n} = -\cos\frac{(n-k)\pi}{n}$$

ezért a (4) képlet így is írható:

$$F_n^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \tag{5}$$

Mindazonáltal (1) bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy (5) fennáll minden páratlan n-re. Az $n = 1$ és $n = 3$ esetek triviálisak. Az $n = 5$ esettel is elboldogulunk, hiszen ismert, hogy

$$\begin{aligned} 8\cos^2 36^\circ &= 3 + \sqrt{5} = 8\cos^2 144^\circ \\ 8\cos^2 72^\circ &= 3 - \sqrt{5} = 8\cos^2 108^\circ \end{aligned}$$

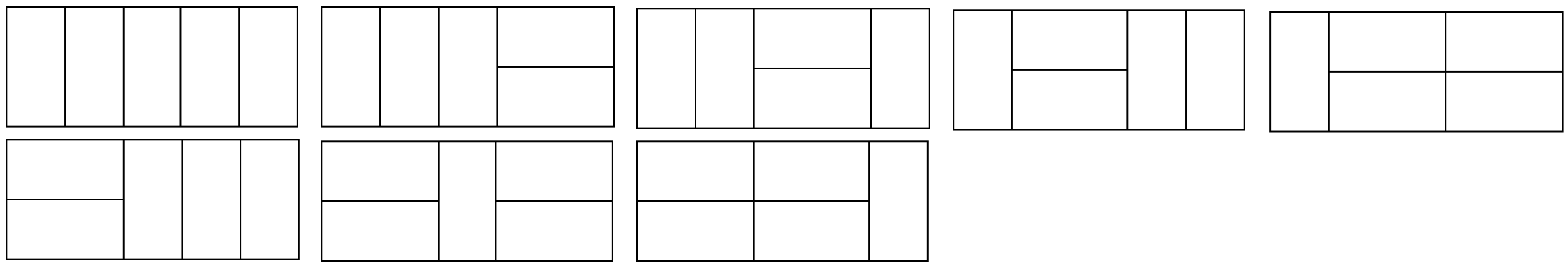
Az $n = 7, 9, 11, \ldots$ esetek pedig már nehezebbek! Nem kizárt, hogy a szabályos 17-szög megszerkeszthetőségének elméletéből még az $n = 17$ esetre is kijön egy bizonyítás, hiszen ekkor az (5) képlet tényezői külön-külön felírhatók racionális számokból alapműveletekkel és gyökjelekkel. Elméletileg az $n = 257$ eset is hasonlóan kezelhető, de a formulák meglehetősen bonyolultak lesznek.

Megriadva a (4) képlet bizonyításához vélhetően szükséges hatalmas képletektől, dominózzunk egy kicsit, hogy megnyugodjunk és pihentek legyünk. Tekintsünk egy $2 \times (n-1)$ méretű sakktáblát, ahol $n = 7, 9, 11, \ldots$. Ezt a táblát fedjük le valahogyan $n-1$ darab dominóval. Minden dominó tehát egy 1×2 vagy egy 2×1 méretű téglalap. Jelölje G_n azt a számot, hány féle módon lehetne ezt megtenni. A továbbiakban állítani fogjuk egyrészt, hogy $G_n = F_n$, másrészt, hogy

$$G_n = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(1 + 4\cos^2 \frac{k\pi}{n}\right) \tag{6}$$

Így jutunk el többek közt az (1) képlet igazolásához is.

A $G_n = F_n$ egyenlőség bizonyítása céljából terjesszük ki G_n definícióját az $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ számokra is. Triviális, hogy $G_3 = 3 = F_3$. Azt sem túl nehéz belátni, hogy $G_4 = 8 = F_4$; illusztrációnak közlünk egy ábrát. A felső sorban olyan dominófedések láthatók, ahol a bal alsó sarokban lévő dominó függőleges, azaz 2×1 helyzetű. Az alsó sorban pedig olyan dominófedések láthatók, ahol a bal alsó sarokban lévő dominó vízszintes, azaz 1×2 helyzetű. Az ábra egyúttal azt is mutatja, hogy minden $n \geq 4$ esetén $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, hiszen a $2 \times (n-1)$ méretű sakktáblán azon dominófedések száma, melyeknél a bal alsó sarokban lévő 2×1 helyzetű, éppen G_{n-1}, és azon dominófedések száma, melyeknél a bal alsó sarokban lévő 1×2 helyzetű, éppen G_{n-2}.



Mármost ha a $G_n = F_n$ egyenlőséget akarjuk bizonyítani $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$esetére, akkor teljes indukció alkalmazásával csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$2^{n-1}\sqrt{5}\; G_{n-1} = \left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}$$

és

$$2^{n-2}\sqrt{5}\; G_{n-2} = \left(1+\sqrt{5}\right)^{n-2} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-2}$$

fennállása esetén fennáll

$$2^{n}\sqrt{5}\; G_{n} = \left(1+\sqrt{5}\right)^{n} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n}$$

is. Valóban, az első feltételezett egyenlőséget 2-szer, a másodikat 4-szer véve és összeadva, majd rendezve:

$$\begin{aligned} 2^n\sqrt{5}\ \left(G_{n-1}+G_{n-2}\right) &= 2\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - 2\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1} \\ &\quad + 4\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-2} - 4\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^n\sqrt{5}\, G_n &= \left(2(1+\sqrt{5})+4\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-2} \\ &\quad - \left(2(1-\sqrt{5})+4\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

Azzal az észrevétellel leszünk készen, hogy

$$\begin{aligned} 2(1+\sqrt{5})+4 &= 6+2\sqrt{5} = \left(1+\sqrt{5}\right)^2 \\ 2(1-\sqrt{5})+4 &= 6-2\sqrt{5} = \left(1-\sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}$$

Az újszülött és a sosem végelgyengülő nyulaink a dominókon párosával kihozzák a gyönyörű (4) képletet, de ehhez még bizonyítani kell a (6) képlet helyességét az $n = 7, 9, 11, \ldots$esetekre. Ehhez kellenek majd az imagináriusok! Az $n = 7, 9, 11, \ldots$ számokra és $m = 3, 5, 7, \ldots$ esetén jelölje $H_{m,n}$ az $(m-1)\times(n-1)$ méretű sakktábla lefedéseinek darabszámát $(m-1)(n-1)/2$ darab dominóval. Tehát $H_{3,n} = G_n$. Jelölje $a_{m,n,\ell,k}$ a következő komplex szám abszolút értékét:

$$\cos\frac{\ell\pi}{m} + i\ \cos\frac{k\pi}{n}$$

Megérkeztek tehát az imagináriusok is! Mármost állítjuk a következő azonosságot:

$$H_{m,n} = \prod_{\ell=1}^{m-1}\ \prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(2\ a_{m,n,\ell,k}\right) \tag{7}$$

Mielőtt ezt bizonyítanánk, tekintsük az $m = 3$ speciális esetet! Ekkor

$$\prod_{\ell=1}^{2} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(2a_{3,n,\ell,k}\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(4\ a_{3,n,1,k}\ a_{3,n,2,k}\right)$$

$$\begin{aligned} 2a_{3,n,1,k} &= \left|2\cos\frac{\pi}{3} + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right| = \left|1 + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right| \\ 2a_{3,n,2,k} &= \left|2\cos\frac{2\pi}{3} + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right| = \left|-1 + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right| \end{aligned}$$

$$4a_{3,n,1,k}\ a_{3,n,2,k} = \left|\left(1 + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(-1 + i\ 2\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 1 + 4\cos^2\frac{k\pi}{n}$$

Következésképpen a (7) képlet valóban általánosítása a (6) képletnek.

Nem csak az $m = 3$ esetben, hanem az $m = 5, 7, 9, \ldots$esetekben is egyszerűsíthető a (7) képlet.

$$\begin{aligned} a_{m,n,\ell,k} &= \left|\cos\frac{\ell\pi}{m} + i\ \cos\frac{k\pi}{n}\right| \\ a_{m,n,m-\ell,k} &= \left|\cos\frac{(m-\ell)\pi}{m} + i\ \cos\frac{k\pi}{n}\right| = \left|-\cos\frac{\ell\pi}{m} + i\ \cos\frac{k\pi}{n}\right| \end{aligned}$$

$$a_{m,n,\ell,k}\ a_{m,n,m-\ell,k} = \cos^2\frac{\ell\pi}{m} + \cos^2\frac{k\pi}{n}$$

Tehát az $m = 5, 7, 9, \ldots$ esetekben is felírható a (7) képlet imagináriusmentesen:

$$H_{m,n} = \prod_{\ell=1}^{(m-1)/2} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(4\cos^2\frac{\ell\pi}{m} + 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \tag{8}$$

Talán érdemes külön foglalkozni az $m = n = 5$ esettel. Tudjuk, hogy

$$8\cos^2 36^\circ = 3 + \sqrt{5}; \quad 8\cos^2 72^\circ = 3 - \sqrt{5}$$

Ezért a (8) képlet speciális eseteként azt állítja, hogy

$$H_{5,5} = 3^2 \left(3 + \sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{5}\right) = 36$$

Ennek jelentése: egy 4×4 méretű sakktábla 36 féle módon fedhető le 8 dominóval.

A fentiekben megmutattuk, hogy (1) igazolásához elég bizonyítani, hogy

$$\left(1 + 4\cos^2 20^\circ\right)\left(1 + 4\cos^2 40^\circ\right)\left(1 + 4\cos^2 80^\circ\right) = 17$$

Vezessük be az $s = \sin 10^\circ$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned}
2\cos 20^\circ &= 2\cos(30^\circ - 10^\circ) = \sqrt{3-3s^2} + s \\
2\cos 40^\circ &= 2\cos(30^\circ + 10^\circ) = \sqrt{3-3s^2} - s \\
2\cos 80^\circ &= 2s
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
& 17 - \left(1 + 4\cos^2 20^\circ\right)\left(1 + 4\cos^2 40^\circ\right)\left(1 + 4\cos^2 80^\circ\right) \\
= \; & 17 - \left(1 + \left(\sqrt{3-3s^2} + s\right)^2\right)\left(1 + \left(\sqrt{3-3s^2} - s\right)^2\right)\left(1 + 4s^2\right) \\
= \; & (1 - 6s + 8s^3)(1 + 6s - 8s^3)
\end{aligned}$$

Másrészt

$$0 = 1 - 2\sin 30^\circ = 1 - 2\sin(3 \cdot 10^\circ) = 1 - 6s + 8s^3$$

Ezzel az (1) képlet bizonyított.

Még mindig adósok vagyunk az általános eredmény bizonyításával. Azt kell tehát megmutani, hogy tetszőleges p, q pozitív egészekre fennáll, hogy a $(2p) \times (2q)$ méretű sakktábla különböző dominólefedéseinek darabszáma:

$$\prod_{\ell=1}^{p} \prod_{k=1}^{q} \left(4\cos^2 \frac{\ell\pi}{2p+1} + 4\cos^2 \frac{k\pi}{2q+1}\right) \tag{9}$$

Ennek a gyönyörű képletnek azonban van két szépséghibája is. Az egyik az, hogy csak kemény lineáris algebrával bizonyítható. De a bizonyítást ennek ellenére egymástól függetlenül már 1961-ben megtalálta Kasteleyn és a Temperley–Fisher szerzőpáros. A másik gond az, hogy (9) nem egy zárt képlet. Olyan képletet szeretnénk, melyben csak alapműveletek, gyökvonás és hatványozás szerepelnek, ráadásul a műveletek darabszáma korlátos legyen, azaz a darabszám ne függjön sem p-től, sem q-tól. (Például (3) ilyen képlet.) Azzal zárjuk írásunkat, hogy tetszőleges p-re (9) nem csak a $q = 1$ esetben hozható zárt alakra — amint azt egymástól függetlenül sokan észrevették —, hanem a $q = 2$ esetben is. Bao megmutatta 1997-ben, hogy $q = 2$ esetén a (9) képlet $16^p\sqrt{29}$-szerese a következő négy, egymáshoz hasonló képlet összege:

$$\left(\sqrt{29} - 11 - \sqrt{134 - 22\sqrt{29}}\right)\left(1 - \sqrt{29} - \sqrt{14 - 2\sqrt{29}}\right)^{2p-1}$$

$$\left(\sqrt{29} - 11 + \sqrt{134 - 22\sqrt{29}}\right)\left(1 - \sqrt{29} + \sqrt{14 - 2\sqrt{29}}\right)^{2p-1}$$

$$\left(\sqrt{29} + 11 - \sqrt{134 + 22\sqrt{29}}\right)\left(1 + \sqrt{29} - \sqrt{14 + 2\sqrt{29}}\right)^{2p-1}$$

$$\left(\sqrt{29} + 11 + \sqrt{134 + 22\sqrt{29}}\right)\left(1 + \sqrt{29} + \sqrt{14 - 2\sqrt{29}}\right)^{2p-1}$$

(Bao képleteit egy kicsit egyszerűsítettük.)

Hivatkozások

J. Bao, On the number of domino tilings of the rectangular grid, the holey square and related problems, *manuscript* (1997).

P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, I: The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, *Physica* 27 (1961) 1209–1225.

H. N. V. Temperley and M. E. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics—an exact result, *Phil. Mag.* 6 (1961) 1061–1063.