

Szokatlan koordinátarendszerek, avagy linearizáló módszerek

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2015. szeptember 17.

Haladvány Kiadvány (szerk. Hujter Mihály)

<http://www.math.bme.hu/~hujter/halad.htm>, 2015.08.21.

<http://www.math.bme.hu/~hujter/150821.pdf>

0. Bevezetés

Bár sok helyen találunk leírásokat különböző koordinátarendszerekről (pl. [W01]), legtöbb helyen csak a "*mindegyiket a megfelelő feladatokra használjuk*" utalást kapjuk az alkalmazhatóságot illetően. Most csak a *derékszögű, nem ekvidisztans* (nem egyenlő beosztású) 2-dimenziós koordinátarendszerek (**KR**) egy szemléletes, majdnem feledésbe merült alkalmazásáról és egy új, egyszerű szemléltető számítógép-programról (alkalmazásról) [HM15] írunk.

A cikkünkben ismertetett módszereket felhasználhatjuk például a [KE11] egyetemi tananyag megoldására is, melyhez a [HM15] programot is használhatjuk.

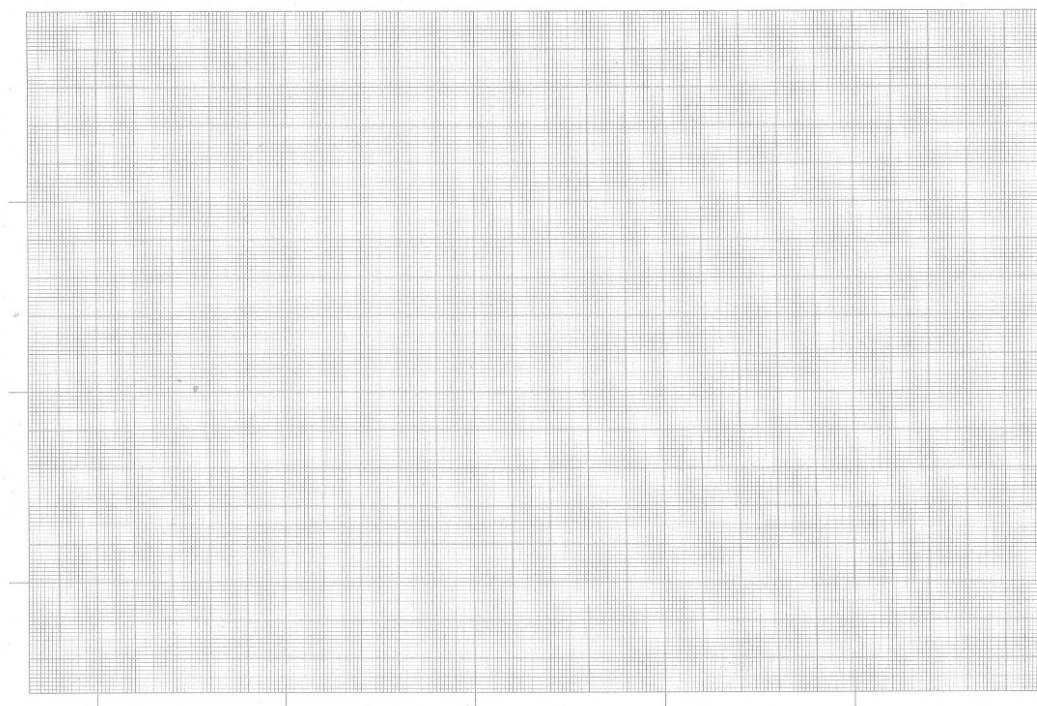
Az érdeklődő (laikus, mérnök, stb.) Olvasó nyugodtan ugorja át a matematikai fejtegetéseket és számolásokat, elegendő, ha csak a kiemelt állításokat, képleteket és az ábrákat tanulmányozza.

A 3-dimenziós koordinátarendszer hasonló átalakításának egy alkalmazásáról például [SzKV01], [SzKV02], [SzKV03] -ban, a *ferdeszögű* és egyéb koordinátarendszerekről pedig [GJ75] és [SzI08] -ben olvashatunk.

Az alábbi képek alatt megadjuk az eredeti, nagyfelbontású fájlok *eredeti URL címét* is (ha van ilyen).

1. A logaritmikus skála

A leggyakrabban használt, "szokásos" derékszögű (Descartes) koordináta-rendszer sűrűn "megvonalezott úrlapja", az úgynevezett "*milliméter-papír*" most is kapható papírboltokban és gyakran használjuk az iskolában: tervrajzok, függvénygrafikonok és mérési értékek ábrázolásaihoz:

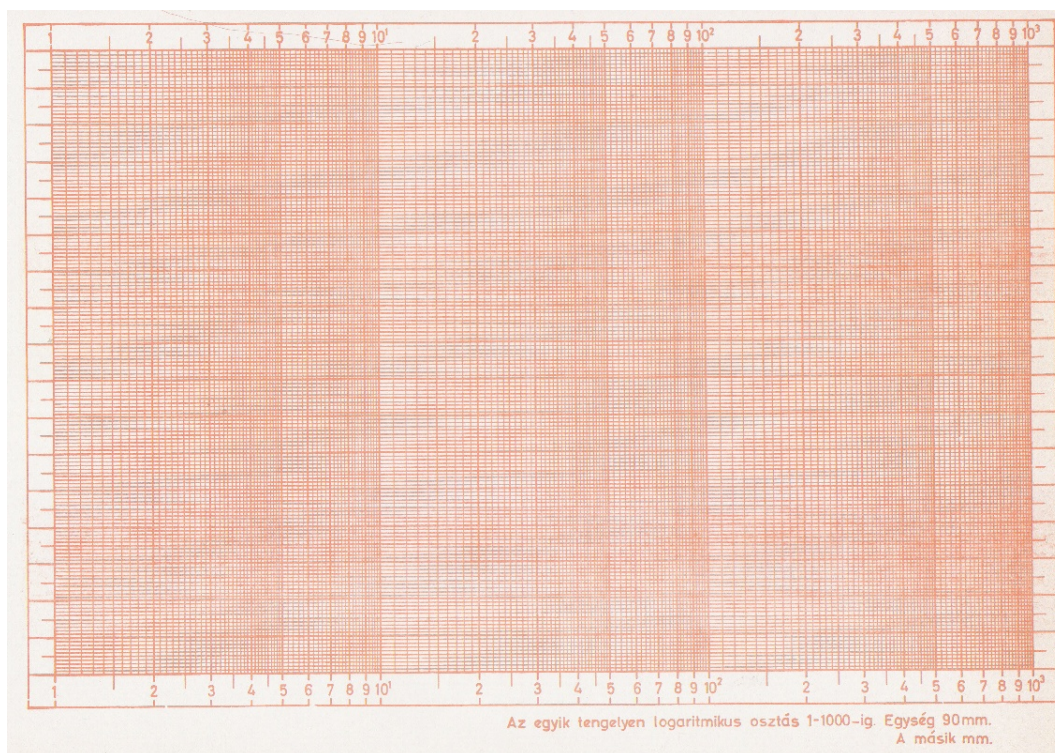


"mm -papír"

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/mm-uj-f.jpg> (1)

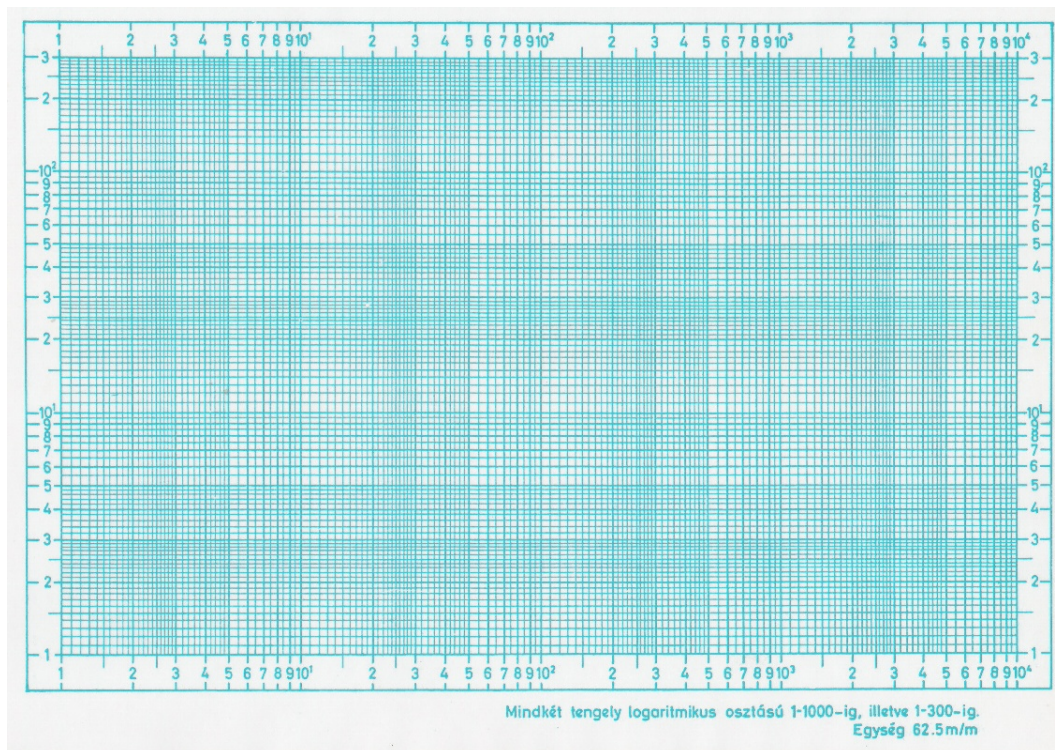
Fiókunk mélyén talán még *logaritmikus* és *szemilogaritmikus* (más néven: *log-log*- illetve *féllogaritmikus*) papírokat is találunk, melyeket gyermekko-

romban fillérekért, nagy tömbökben árusítottak papírboltokban:



Félig logaritmikus papír: a loglineáris papír

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/semilog-uj-f.jpg> (2)



Mindkét tengelyen logaritmikus papír

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/loglog-uj-f.jpg> (3)

Ezek "majdnem" azonosak a milliméter-papírral, csak *az egyik* (vagy mindkét) *koordinátatengelyen logaritmikus* skálá(ka)t találunk:

A $10, 100, \dots, 10^n$ feliratokat **azonos távolságokban** találjuk. (4)

Ez pedig azt jelenti, hogy *tetszőleges* x (pozitív) valós szám esetén az x felirat $\log_a(x)$ távolságban van az origótól (általában $a = 10$ vagy $a = 2$) !

A modern számítástechnikában (pl. táblázatkezelő programokban, Excel, Open Office, stb.) is használhatunk log-log- és szemilog- koordináta-rendszereket (Házi Feladat: tessék megkeresni!), tehát még inkább "illene" megismernünk ezen koordináta-rendszerek tulajdonságait és alkalmazási lehetőségeit - éppen ez jelenlegi cikkünk célja!

Mielőtt ezen furcsa (módosított) koordináta-rendszerek alkalmazását ismertetnénk, röviden a (4) **logaritmikus skála** tulajdonságait mutatjuk be.

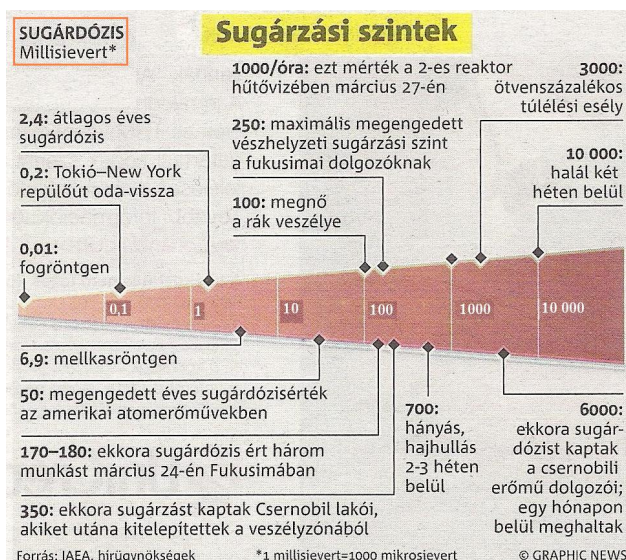
Nézzük meg a fenti papírok *logaritmikus skáláit* közelebbről:



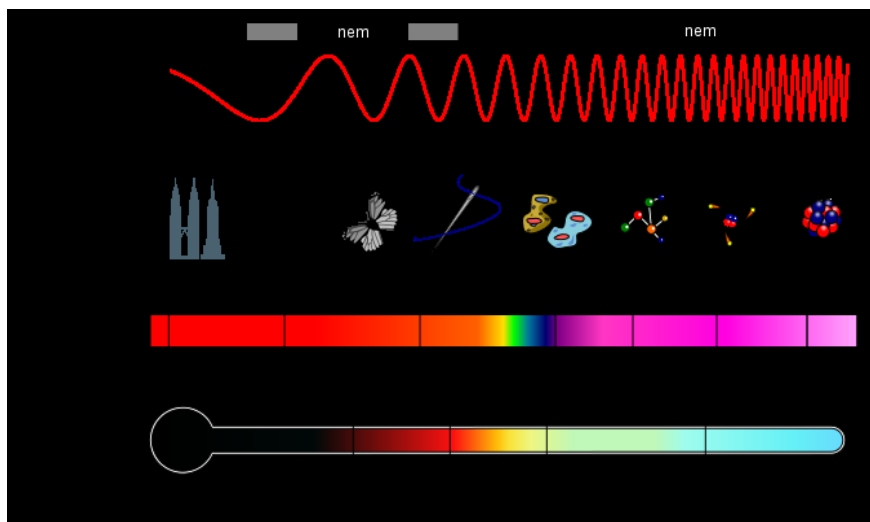
A logaritmikus skála

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/logskala-sk.jpg> (5)

„Az ilyen skálák nagy előnye az, hogy nagyon kicsi és nagyon nagy mennyiségeket *egyszerre* tudunk szemléltetni egyetlen ábrán! **Például:**



A radioaktív sugárzások (forrás:IAEA)



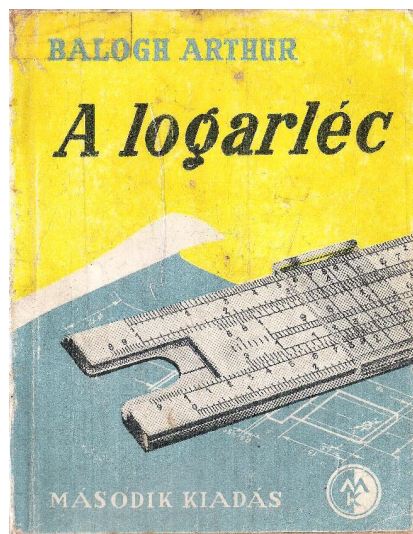
A különböző rádióhullámok (forrás: [W08])

Nem csak a tudósok használják a szokásos mérőszalag fenti torzítását (a Földtörténet évszámait, földrajzi atlaszokban, Richter-skála, statisztika, pH, entrópia, részecskék méretei, csillagok fényerőssége, a vegyészek " n -kilences" pontossága, stb.), hanem mi magunk, *hétköznapi emberek is*! A hangerősség (fizikai nyomás) és annak *érzete* (decibel), vagy a rezgő (gitár-/hegedű-) húr hossza és a hang *magassága* (oktávok, hangközök) közötti összefüggés, és még sok más érzékszervünk működése is logaritmikus, ezt hívják **Weber–Fechner törvénynek**. A fényképezőgép beállításainál is a logaritmikus skálát kell használnunk. Sőt, állítólag egyes afrikai bennszülött törzsek tagjai (mind a gyermekek, mind a felnőttek) a megszámlálандó tárgyakat nem ugyanazon távolságra, hanem egymáshoz egyre közelebb, logaritmikus skála szerint helyezik el ([W03], [W05], [DISP1], [DISP2]) !

A logaritmikus skáláról és más torzítási módszerekről bővebben [SzI02], [SzI04], [SzI05], [SzI07], [W03] és [W05] -ben olvashatunk. Az [SzI05] interaktív honlap 15. fejezetében és a [HM15] szakdolgozat mellékletében található Javascript programok (alkalmazás) segítségével ki is próbálhatjuk a különböző torzítások hatásait.

A logaritmikus skála egy *másik* (már feledésbe merült) alkalmazása a **logarléc** (becenevén "*lőcs*"), a számológépek megjelenése (kb. 1975) előtti időig volt használatban: szorzások, osztások és egyéb számolások gyors el-

végzésében segített (bővebben pl. [BA57], [W02], [SzI06]). [W02] szerint még az Apollo űrhajó legénysége is használta, [SzI06]-ben pedig az általános elméletét és további lehetőségeit ismerhetjük meg.



(6)

Logarlécek

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/Balogh-Logkonyvf.jpg>

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/HM-Logar-Misi.jpg>

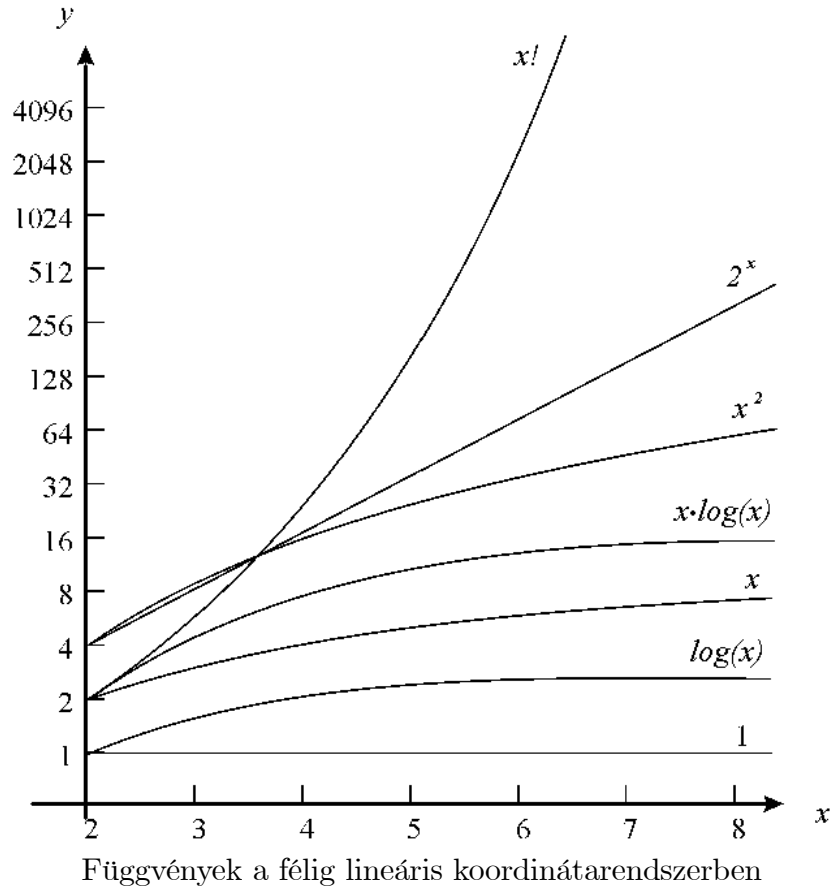
Egy találós kérdés: Milyen lenne egy ilyen, az (5) ábrán látható "logaritmikus" mérőszalag? Könnyebben mérhetnénk vele nagyon nagy és nagyon kicsi mennyiségeket? Szerintem nagyon nagy és kis mennyiségeket csak addig mérhetünk, ameddig a távcsövünk illetve a mikroszkópunk bírja! Vagyis bármilyen beosztású mérőszalag mindössze csak ugyanúgy használható, mint a szokásos, egyenlő közül (latinul ekvidisztans) beosztású mérőszalag: "ha ez a tárgy z cm, akkor a z cm polcra éppen, hogy elfér ..." .

A szokásos (egyenlő közül) beosztású mérőszalagnak azért van egy nagy előnye: a tárgyak hosszúságainak összege valóban a hosszak összege feliratnál található!

2. Linearizálások

No jó, de mire jók az ilyen koordinátarendszerek, miért fogtak az ilyen "papírok" kilószám, miért építik be mostanában is őket a mai táblázatkezelő programokba?

Például a [SzI02], [SzI04], [SzI05], [SzI07] művekben láthatjuk a szokásos alapfüggvények: x , x^2 , 2^x , ... eltorzult grafikonjait a félig-log koordináta-rendszerben (az y tengelyen most 2 hatványai vannak feltüntetve egyenlő közönként, vagyis ez most $\log_2$ -skála, az x tengely most változatlan):



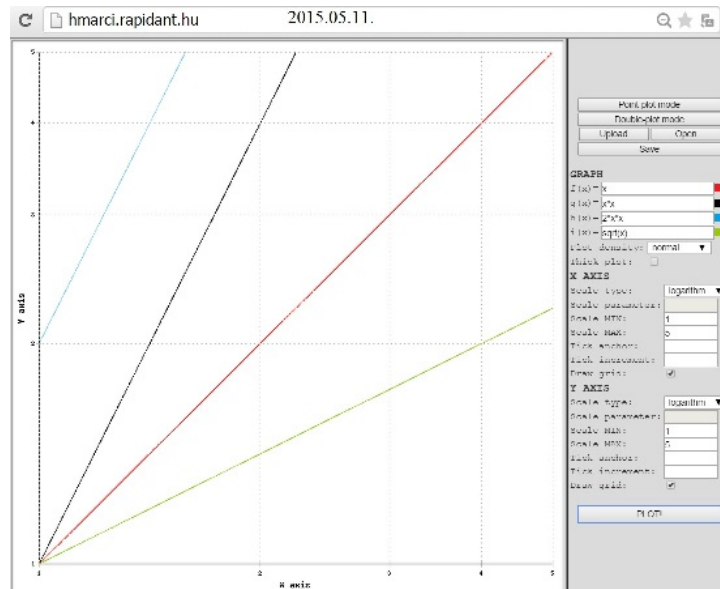
(7)

Hát persze: ha a például az y tengelyt "összenyomjuk", akkor természet-szerűleg a grafikonokat is "lefelé összenyomjuk", görbékük "lekonyul" vagy éppenséggel *kiegyenesedik* - **lineáris**sá válik. A fenti ábrán ez az $y = 2^x$ függvénygörbe (tessék megkeresni az ábrán!).

A (7) ábrán látható koordináta-rendszer abban különbözik a (2) szemilo-garitmikus papírtól, hogy itt az y tengelyen van logaritmikus beosztás, míg ott az x tengelyen. Hogyan kell *elforgatni* a (2) szemilogaritmikus papírt

ahhoz, hogy a (7) ábrához hasonlókat rajzoljunk, és mi a különbség a két koordinátarendszer között - ezt a (30) ábrán és a 4.4. fejezetben ismertetjük.

A *log-log* (más néven: duplán logaritmus, ld. a (3) ábrán) koordinátarendszerben más függvények grafikonjai válnak egyenesekké:



A duplán logaritmus koordinátarendszer

(8)

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/log-log-hatvany-150511.jpg>

Néhány további grafikont láthatunk még [W04] -ben, valamint a következő alfejezetben, a (9) és (10) ábrákon.

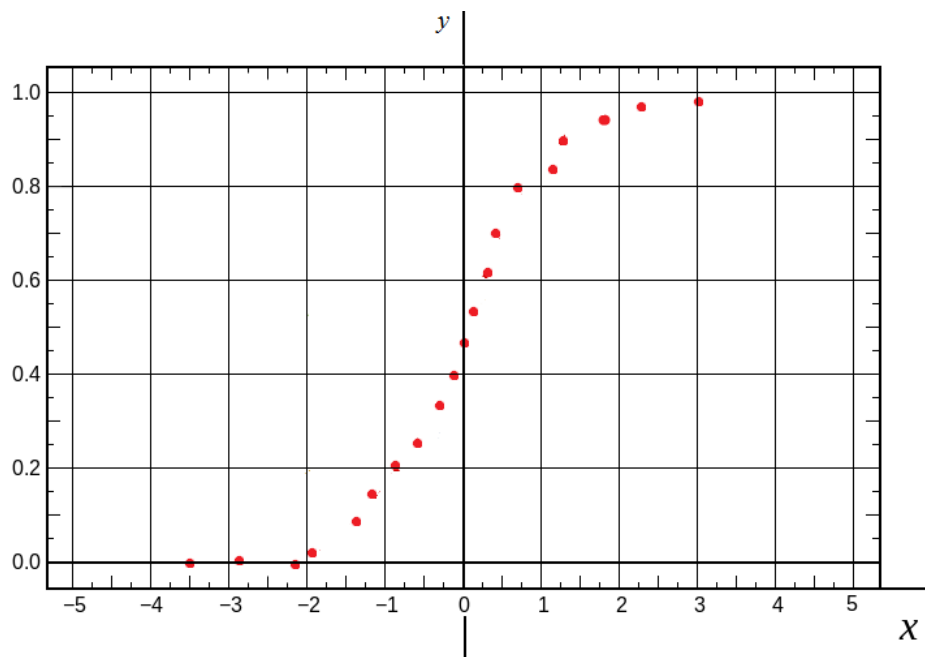
Mint a fenti (7) és (8) ábrákon láthatjuk, bizonyos típusú függvények grafikonjai bizonyos koordinátarendszerekben, vagyis az x és y tengelyek bizonyos "átskálázása" után **kiegyesednek** ("linearizálódnak") amit egy iskolai vonalzóval, egyszerűen a képernyőre (papírra) helyezéssel **ellenőrizhetünk**. Ez pedig a módszer célja: a vizsgált összefüggés helyességét egyszerűen ellenőrizhetjük (persze, a megfelelő papíron felrajzolva)!

A [HM15] dolgozathoz mellékelt programmal kipróbálhatjuk, hogy kedvenc függvénygrafikonjaink milyen alakúak a különböző koordinátarendszerekben.

Az általános elmélet előtt lássuk a *legfontosabb alkalmazást*:

2.1. Mérési adathalmazok kiértékelése

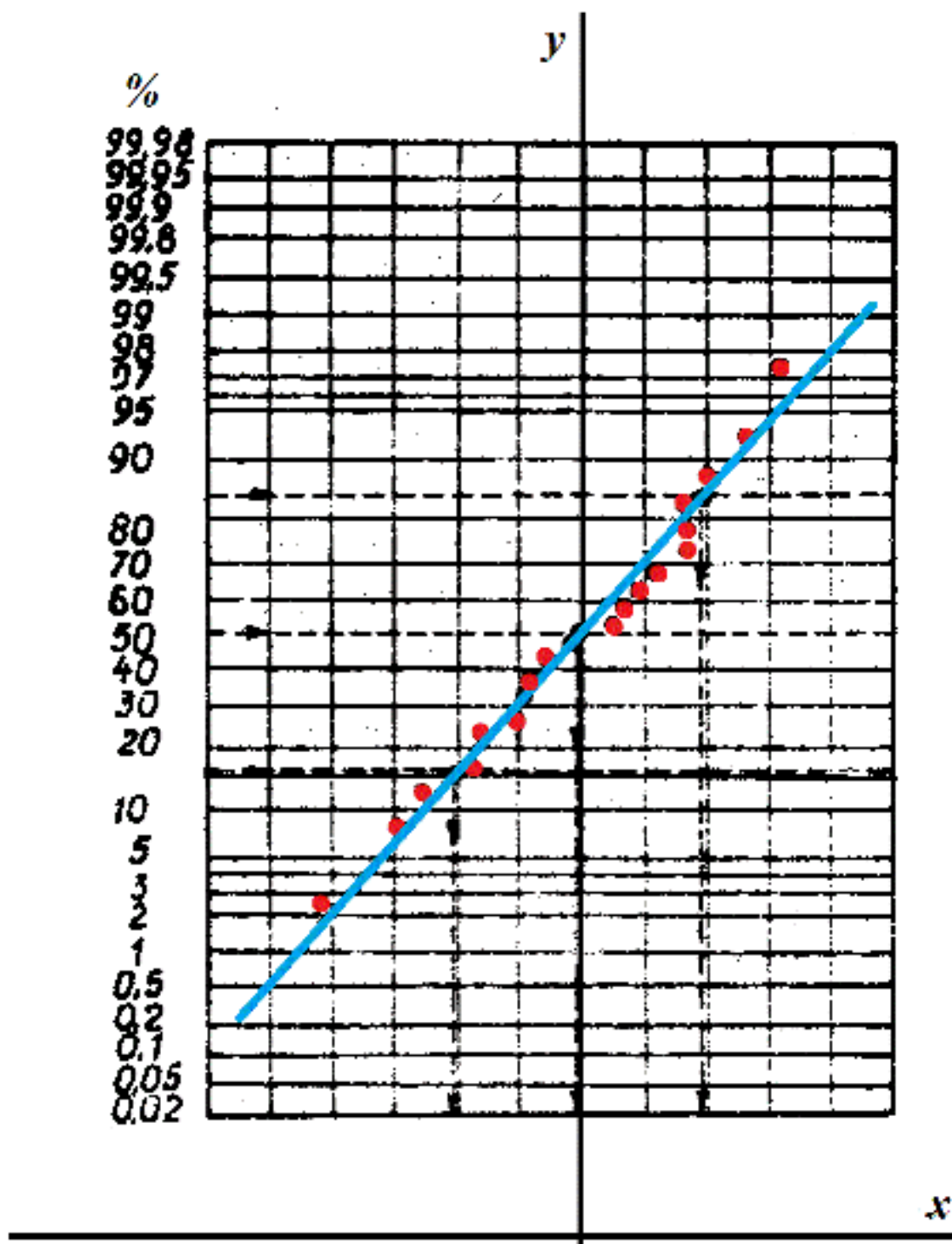
Fizikai, kémiai, gazdasági, stb. összefüggések, folyamatok tanulmányozásánál, modellezésénél a mért adathalmaz kiértékelése nem csak az adatok szokásos Descartes-koordinátarendszerben történő ábrázolását jelenti. Ugyanis a vizsgált összefüggés a legritkább esetben *lineáris* (egyenes, azaz $y = mx + b$ alakú). A kirajzolódó girbe-gurba ponthalmazról nehezen eldönthető vagy ellenőrizhető, hogy hatvány-, exponenciális-, vagy esetleg (Gauss-féle) normális eloszlás-e (ld. [LZ75], [W06], [W07]):



Normális eloszlású mérési adatok

(9)

Azonban, ha az y tengelyt ismét megnyújtjuk/zsugorítjuk (ennek mikéntjét a következő fejezetekben mutatjuk meg), a pöttyök egyenesre illeszkedése, vagyis az eredeti mérési eredmények normális eloszlása, *egy vonalzóval könnyen ellenőrizhető*:



Normális eloszlású mérési adatok a Gauss-papíron

(10)

Ez részletesebben a következőt jelenti. A fizikus/kémikus/biológus/közvéleménykutató/stb. a rengeteg mérés eredményét a táblázatkezelő program koordinátarendszerében ábrázolja (régén az (1)-(3) vagy a (30) vagy a (10) papírok valamelyikén kézzel "bepötytyözte"), majd "szemmel" és utána vonalzóval megnézi, hogy az adathalmaz egy egyenesre esik-e. Ha igen, akkor a vizsgált összefüggés *típusát* (exponenciális, logaritmikus, hatvány, stb.) az alkalmazott koordinátarendszerből, és főbb *paramétereit* az egyenes adataiból (meredekség, tengelymetszet) meg tudja állapítani.

A módszer részleteit a 4. fejezet alfejezeteiben ismertetjük, gyakorló feladatokat [KE11] -ben találhatunk.

A [HM15] dolgozathoz mellékelte programmal megpróbálhatjuk bármely adathalmaz kiegyenesítését különböző koordinátarendszerekben, nem csak szemi- vagy duplán logaritmikus, hanem még sok más koordinátarendszerben is.

3. Az általános linearizáló módszer

Rögzített tehát a síkon két, derékszögben metsző egyenes, nevük legyen x és y , metszéspontjuk legyen O , az **origó** ("origin"="eredet").

1) A hagyományos, "Descartes-féle" koordinátarendszerben a sík egy *tetszőleges* P pontjának **Descartes-féle koordinátái** (x_P, y_P) , ahol:

x_P = a P pontnak az y tengelytől (!) való távolsága, más szóval P -nek O **-tól** (!) az x tengely (!) **mentén** vett távolsága,

y_P = a P pontnak az x tengelytől (!) való távolsága, más szóval P -nek O **-tól** (!) az y tengely (!) **mentén** vett távolsága.

Tehát a pont **koordinátái** (= a tengelyekre írt számok, "**feliratok**") *meg-egyeznek* a geometriai távolsággal! Az *alábbi* koordináta-transzformációkban a sík P pontjainak *nem a fenti távolságok lesznek közvetlenül a koordinátái*.

1. Jelölés. Az alábbiakban x_t és y_t jelöli a P pont geometriai ("igazi") **távolságait** a tengelyektől. Ezekben a távolságokban azonban az x_f és y_f **feliratokat** írjuk, és ezeket hívjuk a P pont **koordinátáinak**.

Más szavakkal, az (x_f, y_f) értéke az (x_t, y_t) geometriai pontban (távolságban) helyezzünk el.

A könnyebb olvashatóság miatt néha csak t **távolságot** mondunk és írunk x_t

és y_t helyett, és a ponthoz írt s **számot** ("felirat") mondunk és írunk x_f és y_f helyett. $\square$

A módosítások célja, hogy bizonyos $y = h(x)$ függvénykapcsolatok *grafikonjai*, mint geometriai ponthalmazok egyenesek ("**lineárisak**") legyenek, vagyis az $y = h(x)$ függvénygörbét "kiegyenesítsük". A kapott egyenes paramétereinek (meredekség, tengelymetszet) könnyű leolvasása még azt is lehetővé teszi, hogy akár egy képlettel adott függvény, akár egy mérésorozast adatai alapján a h függvény bizonyos paramétereit is megkapjuk.

2) Ezután rögzítsünk két, *tetszőleges, szigorúan monoton* (akár növe, akár csökkenő), lehetőleg az egész számegyenesen értelmezett és *folytonos* függvényt:

$$\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (11)$$

2. Megjegyzés. Általában $\text{Dom}(\varphi)$ és $\text{Dom}(\psi) \neq \mathbb{R}$, vagyis erre ("kikötés") is kell ügyelni mind az elméleti vizsgálatokban (leírásban), mind a számítógép programozásban. Ez azt jelenti hogy az ilyen esetekben a sík nem minden pontjának lesznek koordinátái, vagy esetleg nem minden koordináta jelenik meg geometriai pontként a papíron.

Közismert az alábbi tény (pl. [SzI01], [SzM11]):

3. Állítás. *Szigorúan monoton függvények mindig invertálhatóak és inverzük is szigorúan monoton, sőt ugyanolyan típusú (növe vagy csökken).* $\square$

4. Definíció. A sík P pontjainak (φ, ψ) -**koordinátáinak** az (x_f, y_f) számpárt értjük, ahol

$$\boxed{x_f = \varphi^{-1}(x_t) \quad \text{és} \quad y_f = \psi^{-1}(y_t)} \quad , \quad (12)$$

a módosított koordinátarendszert pedig röviden (φ, ψ) -**koordinátarendszernek** (**KR**) nevezzük. $\square$

Megjegyzés: A (12) egyenlőség így is írható:

$$\boxed{\varphi(x_f) = x_t \quad \text{és} \quad \psi(y_f) = y_t} \quad . \quad (13)$$

A (13) egyenlőséget úgy értelmezzük, hogy az x tengelyen az x_f feliratot $x_t = \varphi(x_f)$ távolságra írjuk fel, és az y tengelyen az y_f feliratot $y_t = \psi(y_f)$

távolságra írjuk fel. A (12) egyenlőség ennek megfordítása: a tengelyeken az origótól x_t ill. y_t távolságokban az $x_f = \varphi^{-1}(x_t)$ ill. az $y_f = \varphi^{-1}(y_t)$ feliratok találhatóak. Amikor pedig egy ábrát rajzolunk vagy értelmezünk (nézünk), akkor csak az x_f , y_f értékeket (feliratokat!) tekintjük, hiszen ezeket olvassuk (olvashatjuk) le a tengelyek skáláin!

Vagyis mi az

$$\boxed{y_f = h(x_f)} \quad (14)$$

függvény *módosított* grafikonját szeretnénk felrajzolni, a (φ, ψ) koordináta-rendszerben!

A cikk hátralevő részében azt a kérdést boncolgatjuk, hogy különböző (φ, ψ) koordinátarendszerben mely h függvények grafionjai lesznek *egyenesek*. A középiskolában tanult *lineáris függvénytranszformációk* ("vízszintes és függőleges tologatások, nyújtások, zsugorítások, tükrözések") mind *egyenes-tartóak*, ezért az alábbiakban bármely $\vartheta(x)$ függvény *helyett* (vagyis $\varphi, \psi, h, F, \Phi, \dots$ bármelyike helyett) nyugodtan írhatjuk az

$$\vartheta'(x) := a \cdot \vartheta(bx + c) + d \quad (15)$$

függvényt is, tetszőleges $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (rögzített) valós számokra.

Speciálisan, *bármelyik alapú* logaritmussfüggvény a mi szempontunkból ugyanúgy viselkedik, hiszen tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}$ pozitív ($\neq 1$) alapok esetén

$$\log_v(x) = \frac{1}{\log_u(v)} \cdot \log_u(x) \quad , \quad (16)$$

vagyis $a = \frac{1}{\log_u(v)}$, $b = 1$, $c = d = 0$ (15)-ben.

Hasonlóan: *bármelyik alapú* exponenciális függvényt is vehetjük, hiszen

$$v^x = u^{bx} \quad \text{ahol} \quad b = \log_u(v) \quad (17)$$

vagy modern írásmóddal:

$$\exp_v(x) = \exp_v(bx) \quad .$$

Egy $y = h(x)$ függvénykapcsolat *grafikonja* pontosan akkor lesz egy **geometriai egyenes**, ha a pontokhoz tartozó x_t, y_t értékek közötti kapcsolat lineáris:

$$y_t = m \cdot x_t + b \quad , \quad (18)$$

azaz

$$\psi(y_f) = m \cdot \varphi(x_f) + b, \quad (19)$$

vagy másképpen

$$y_f = \psi^{-1}(m \cdot \varphi(x_f) + b). \quad (20)$$

A (19) illetve (20) feltételek teljesülését most nem vizsgáljuk meg általánosan, hanem csak az egyes speciális esetekben, az alábbi alfejezetekben.

4. Az egyes koordinátarendszerek

Most pár speciális esetet ismertetünk részletesebben. Megismételjük, hogy a [HM15] dolgozat melléklete egy olyan programot tartalmaz, amellyel *bármilyen* φ és ψ függvényekre kipróbálhatjuk bármely h függvény grafikonját vagy bármely adathalmaz ábráját.

4.1. A Descartes koordinátarendszer

Ezt a rendszert mellesleg nem is R.Descartes találta fel ([Szi09]), bár kétségkívül nagy hatása volt a részletek kidolgozásában és elterjesztésében.

A hagyományos, "Descartes-féle" koordinátarendszerben

$$\boxed{\varphi = \psi = id \quad \text{vagyis} \quad x_f = x_t \text{ és } y_f = y_t}.$$

Továbbá, tetszőleges rögzített (nemnulla) u_1, v_1, u_0, v_0 valós számok esetén az

$$\begin{cases} x_t = u_1 \cdot x_f + u_0 = \varphi(u_1 \cdot x_f + u_0) \\ y_t = v_1 \cdot y_f + v_0 = \psi(v_1 \cdot y_f + v_0) \end{cases} \quad (21)$$

koordináta-transzformáció (lényegében) megfelel a középiskolákban tanított "**lineáris függvénytranszformációk**" -nak felel meg: "vízszintes ill. függőleges nyújtás, zsugorítás, eltolás, ..." .

Közismert, hogy ebben a koordinátarendszerben, minden (nemnulla) u_1, v_1, u_0, v_0 valós számokra is, kizárólag az

$$\boxed{y = h(x) = mx + b}$$

alakú függvények grafikonjai egyenesek (lineárisak), továbbá a rajzról az m és b prarméterek könnyen leolvashatók.

Az [Szi05] interaktív honlap 15. fejezetében található programjával u_1, v_1, u_0, v_0 értéke tetszőlegesen változtatható és a kapott rajz tanulmányozható.

4.2. A legegyszerűbb eset

Ha csak egyetlen

$$y = F(x) \quad (22)$$

függvényt szeretnénk "kiegyenesíteni" (vagyis $h = F$), akkor az x tengelyen maradjon a hagyományos, "ekvidisztans" skála (vagyis $x_f = x_t$, azaz $\varphi(x) = x$), és az y tengelyen pedig az s számot ("feliratot") a $t = F^{-1}(s)$ távolságra írjuk (F^{-1} természetesen az F függvény *inverze*). Vagyis a (11) képletben

$$\varphi = id, \quad \psi = F^{-1}, \quad (23)$$

részletesebben:

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = x_f \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = F^{-1}(y_f)}, \quad (24)$$

ami összhangban van (22)-el, hiszen

$$x_f = x_t \quad \text{és} \quad y_f = F(y_t) .$$

5. Tétel. *A (23) transzformáció esetén pontosan csak (kizárólag) az F függvénynek és lineáris függvénytranszformációinak, vagyis az*

$$\boxed{y_f = F(m \cdot x_f + b)} \quad (25)$$

alakú függvények grafikonjai lesznek egyenesek.

Megfordítva: ha a (23) koordinátarendszerben az ábrázolt függvény (mérési adathalmaz) egyenes, és egyenlete

$$y_t = m \cdot x_t + b, \quad (26)$$

akkor az eredeti függvény (25) alakú.

(m és b az egyenes meredeksége és tengelymetszete.)

Bizonyítás. Ekkor ugyanis a (23) és (13) összefüggések alapján a (19) linearizáló feltétel a következő formát ölti:

$$F^{-1}(y_f) = m \cdot x_f + b$$

vagyis valóban

$$y_f = F(m \cdot x_f + b) .$$

Megfordítva, (26), vagyis $y_t = m \cdot x_t + b$ esetén valóban

$$y_f = F(y_t) = F(m \cdot x_t + b) = F(m \cdot x_f + b) .$$

■

A (23) transzformációnak speciális esete a *szemilogaritmikus* "papír" az $F(x) = \psi^{-1}(x) = c^x$ vagyis $\psi(x) = \log_c(x)$ választással, továbbá a *Gauss papír* az $F(x) = \Phi(x) = \psi^{-1}(x)$ azaz $\psi(x) = \Phi^{-1}(x)$ választással, ahol Φ a normális eloszlás eloszlásfüggvénye (lásd (49) vagy [W06]), melyeket a 4.4. illetve 4.6. alfejezetekben ismertetünk.

4.3. A másik legegyszerűbb eset

A transzformáció most: φ tetszőleges és $\psi = id$:

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) \quad \text{és} \quad y_t = y_f} , \quad (27)$$

azaz

$$\boxed{x_f = \varphi^{-1}(x_t) \quad \text{és} \quad y_f = y_t} . \quad (28)$$

Ezt a koordinátarendszert például a (2) ábrán, vagy a [HM15] szakdolgozat programja segítségével tanulmányozhatjuk, egy fontos speciális esete a lognormális koordinátarendszer, amit a 4.4.2. alfejezetben ismertetünk.

6. Tétel. *A (27) koordinátarendszerben pontosan az*

$$\boxed{h(x) = m \cdot \varphi(x) + b} \quad (29)$$

alakú függvények grafikonjai lesznek egyenesek.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az előző alfejezet (24) transzformációja után a kiegyenesedő függvények (25)-ben leírt képletei hasonlóak a (29) képletben bemutatott függvényekhez, de *nem teljesen azonosak!*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a (27) azaz (28) összefüggések esetén az

$$y_t = m \cdot x_t + b$$

és

$$y_f = m \cdot \varphi(x_t) + b = m \cdot x_f + b = h(x_f)$$

egyenletek ekvivalensek (azonosak). ■

4.4. A félig logaritmikus koordinátarendszerek

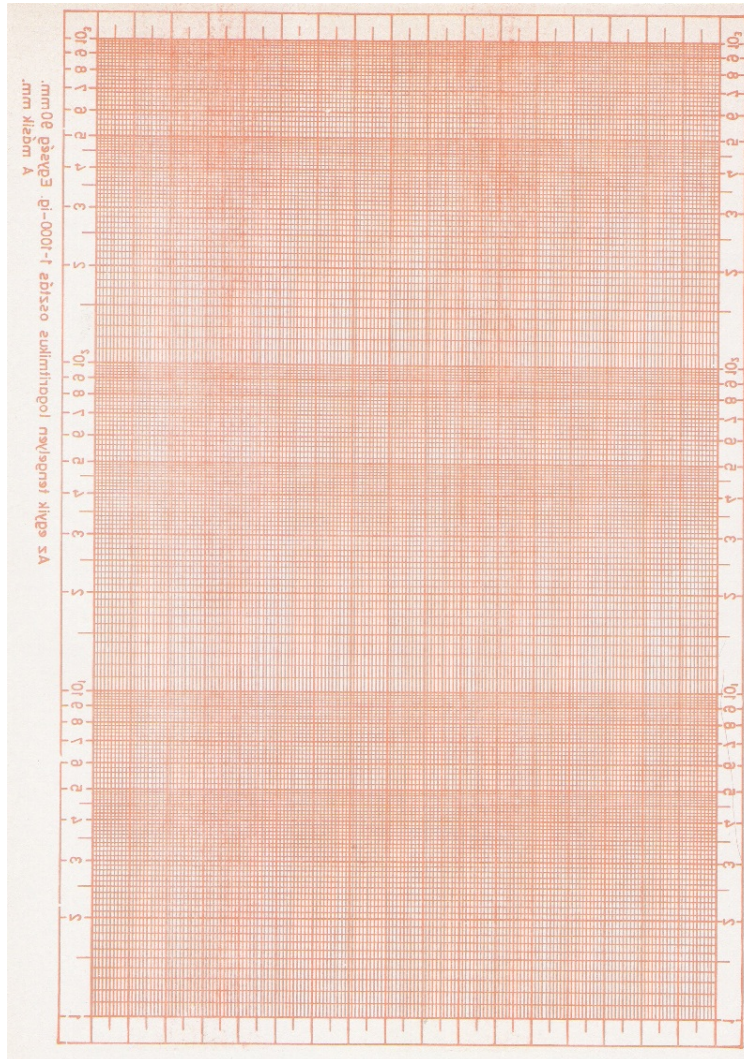
A 11. Állítás szerint teljesen mindegy, milyen alapú logaritmust használunk.

Vigyázzunk: ha csak az egyik koordinátatengely logaritmikus, akkor máris két választási lehetőségünk van: melyik ez a tengely? (A teljes logaritmikus skálát az (5) képen találjuk.)

A *szemilogaritmikus papíron*, a (2) képen a vízszintes (x) tengely logaritmikus, ezért *ezt* a koordinátarendszert **loglineáris** ($x=\log$, $y=\text{lin}$) rendszernek nevezzük. A (7) ábrán az x tengely egyenletes (ekvidisztans), és az y tengely logaritmikus, *ezt* a rendszert pedig egyszerűen csak **logaritmikus** koordinátarendszernek nevezik!

Tehát, ha véletlenül papíron dolgozunk és a boltban *csak* a (2) szemi-logaritmikus (azaz loglineáris) papír kapható, akkor hogyan cseréljük meg a két tengelyt, vagyis hogyan forgassuk a (2) papírt, hogy logaritmikus rendszer legyen előttünk az asztalon? Fel kell cserélnünk az x és y tengelyeket, ezzel a problémával *függvények inverzének* felrajzolásakor is találkozunk, megoldást például [Szi04]-ben is találhatunk.

Sajnos ez csak úgy megy, hogy a papír *háttoldalát* kell magunk felé fordítanunk, majd a papírt el kell forgatnunk 90° -kal:



A félig logaritmikus papír

(30)

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/semilog-uj-hata.jpg>

Tehát ezért érdemes *pausz*, vagyis átlátszó papírra nyomtatott koordináta-rendszert vennünk a boltban (vagy a szokásos, nem átlátszó papírt nappal ablaküvegre téve szemlélnünk és rajzolnunk rá.)

4.4.1. A szemilogaritmikus koordinátarendszer

A **szemilogaritmikus** ("szemi"="félig") rendszerben, amit röviden csak **logaritmikus** koordinátarendszernek hívnak, a *független változó* (x) tengelyén egyenletes (id), a *függő változó* (y) tengelyén *logaritmikus* beosztást készítünk. A (7) rajzon $\varphi = id$ és $\psi = \log_2$, vagyis $x_t = x_f$ de $y_t = \log_2(y_f)$ vagyis $y_f = 2^{y_t}$, a (30) ábrán pedig $y_f = 10^{y_t}$.

A (7) rajzon látható, hogy (egyedül) a $h(x) = 2^x$ függvény ábrája egyenes. Általában pedig, ha az y tengelyen $\log_a$ beosztást készítünk, vagyis φ és ψ a (31) összefüggés szerinti, akkor pontosan a $c \cdot a^{\lambda x}$ függvények képei lesznek egyenesek.

A 4.2. alfejezet (23) képletével ez teljesen összhangban van, mert most $F(x) = h(x) = a^x$ és $\psi = F^{-1} = \log_a$, $\varphi = id$.

Az 5. Tétel alapján már mindent tudunk, de a gyakorlati felhasználások miatt vizsgáljuk meg ezt az esetet kicsit közelebbről.

7. Tétel. *Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ valós és $a, c, d \in \mathbb{R}^+$ ($a \neq 1$) pozitív számok esetén a*

$$x_t = \varphi(x_f) = x_f \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \log_a(y_f) \quad (31)$$

koordináta-transzformáció után minden

$$\boxed{h(x) = d \cdot c^{\lambda x}} \quad (32)$$

alakú (exponenciális) függvény grafikonja egyenes (geometriailag).

Bizonyítás. A (32) képlet az ábrázoláskor azt jelenti, hogy

$$y_f = h(x_f) = d \cdot c^{\lambda x_f}, \quad (33)$$

mindkét oldal $\log_a$ értékét véve kapjuk:

$$\begin{aligned} \log_a(y_f) &= \log_a(d \cdot c^{\lambda x_f}) \\ &= \lambda \cdot x_f \cdot \log_a(c) + \log_a(d) \end{aligned} \quad (34)$$

vagyis (31) alapján valóban

$$y_t = mx_t + b. \quad (35)$$

■

A fenti számolás csak azt igazolja, hogy a (32) alakú exponenciális függvények képei kiegyenesednek, de lehet-e *más* függvény képe is egyenes? Az alábbi számolás ezt is igazolja, sőt m és b ismeretében még a d, c és λ paraméterek értékét is meghatározhatjuk.

8. Állítás. Ha egy $h(x)$ függvény grafikonja a $\log_a$ logaritmikus koordináta-rendszerben (35) egyenes, akkor a $h(x)$ függvény csak (32) alakú lehet, sőt

$$d = a^b, \quad c = a^m \quad \text{és} \quad \lambda = 1, \quad (36)$$

vagy másképpen

$$d = a^b \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{m}{\log_a(c)} \quad (37)$$

ahol a $c > 0$ alapot tetszőlegesen választhatjuk, a 9. Megjegyzés miatt.

Bizonyítás. A (19) összefüggés alapján most $\log_a(y_f) = m \cdot x_f + b$ vagyis valóban $y_f = a^{m \cdot x_f + b} = c^{x_f} \cdot d$ ahol $c = a^m$ és $d = a^b$, $\lambda = 1$. ■

A (36) és (37) képletek összhangban vannak a (34) és (35) képletekkel.

A lényeg az, hogy az egyenes ábráról leolvasott m és b értékeiből a d és λ paraméterek meghatározhatók, a (36) vagy (37) képletek segítségével, és a fenti két tétel szerint *kizárólag* csak a $d \cdot c^{\lambda x}$ alakú függvények grafikonjai lesznek egyenesek a (szemi)logaritmikus koordináta-rendszerben.

A középiskolából jól ismert a következő összefüggés:

9. Megjegyzés. A c alap előzetes megválasztása lényegtelen, mert tetszőleges c_1, c_2 alapok és $\lambda \in \mathbb{R}$ kitevő esetén

$$(c_1)^\lambda = (c_2)^{\lambda_2 \cdot \lambda}$$

ahol

$$\lambda_2 = \log_{c_2}(c_1) \quad .$$

A (31) képletben szereplő koordináta-transzformációt **szemilogaritmikus** transzformációnak nevezzük, és megkülönböztetésül (φ_S, ψ_S) jellel jelöljük.

A szemilogaritmikus rendszer és a fenti Állítás speciális esete a 3. fejezetben tárgyalt általános összefüggésnek.

4.4.2. A loglineáris koordináta-rendszer

Ezt a koordináta-rendszert például a (2) ábrán, vagy a [HM15] szakdolgozat programja vagy [KE11] feladatainak segítségével tanulmányozhatjuk. A transzformáció most

$$\varphi = \log_a \quad \text{és} \quad \psi = id,$$

részletesebben:

$$\boxed{x_t = \log_a(x_f) \quad \text{és} \quad y_t = y_f} \quad . \quad (38)$$

10. Tétel. A (38) transzformáció esetén pontosan a

$$\boxed{h(x) = d \cdot \log_c(x) + \delta} \quad (39)$$

vagy másképpen írva:

$$\boxed{h(x) = \log_c(x^d \cdot \gamma)}$$

alakú függvények képei lesznek egyenesek (ahol $\delta = \log_c(\gamma)$ vagyis $\gamma = c^\delta$).
Megfordítva: ha egy $h(x)$ függvény grafikonja egyenes a loglineáris koordináta-rendszerben, tehát

$$y_t = mx_t + b \quad (40)$$

alakú, akkor $h(x)$ csak (39) alakú lehet, ahol például

$$d = \frac{m}{\log_c(a)} \quad \text{és} \quad \delta = b \quad (41)$$

és c tetszőleges (lásd még a 11 Állítást is).

Bizonyítás. A (38) és (39) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} y_t &= \psi(y_f) = y_f = d \cdot \log_c(x_f) + \delta = d \cdot \frac{\log_a(x_f)}{\log_a(c)} + \delta = \\ &= \frac{d}{\log_a(c)} \cdot x_t + \delta = mx_t + b. \end{aligned}$$

Megfordítva, a (40) összefüggés teljesülése esetén használjuk a (20) és (38) képleteket, ami szerint $\psi^{-1}(z) = \psi(z) = z$ minden $z \in \mathbb{R}$ valós számra, és így

$$y_f = m \cdot \varphi(x_f) + b = m \cdot \log_a(x_f) + b = \frac{m}{\log_c(a)} \cdot \log_c(x_f) + b.$$

Ez megegyezik a (39) képlettel, vagyis (41) valóban igaz. ■

A (39) és (41) képletekben c valóban bármi lehet, hiszen középiskolából jól ismert:

11. Állítás. Bármely $d_1 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ valós számokhoz található olyan $d_2 \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyre

$$d_1 \cdot \log_{c_1}(x) = d_2 \cdot \log_{c_2}(x) \quad (42)$$

minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül.

Továbbá

$$\log_a(c) = \frac{1}{\log_c(a)} \quad (43)$$

tetszőleges $a, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ számokra.

Bizonyítás. Az általános

$$\log_u(x) = \frac{\log_v(x)}{\log_v(u)} \quad (44)$$

összefüggés alapján

$$d_1 \cdot \log_{c_1}(x) = d_1 \cdot \frac{\log_{c_2}(x)}{\log_{c_2}(c_1)} = \frac{d_1}{\log_{c_2}(c_1)} \cdot \log_{c_2}(x)$$

vagyis

$$d_2 = \frac{d_1}{\log_{c_2}(c_1)} ,$$

továbbá

$$\log_a(c) = \frac{\log_c(c)}{\log_c(a)} = \frac{1}{\log_c(a)} .$$

■

A most tanulmányozott *szemilogaritmikus* és *loglineáris* koordinátarendszereket összehasonlítva észrevehetjük, hogy a kiegyenesített függvények ($\exp$ és $\log$) egymás inverzei, ezt már a 4.8. alfejezetben megjósoltuk

4.5. A log-log koordinátarendszer

A **kettős logaritmikus-** (vagy röviden csak **log-log-**) koordinátarendszerben *mindkét tengelyen* logaritmikus beosztást készítünk (nem feltétlenül azonos alappal). A kereskedelemben kapható **kettős logaritmikus papírt** a (3) ábrán láthatjuk. A (8) ábrán pedig az x , x^2 , $2x^2$ és $\sqrt{x}$ függvények grafikonjait ebben a koordinátarendszerben, mely ábrát a [HM15] szakdolgozat programjával készítettünk.

12. Tétel. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ pozitív és $m \in \mathbb{R}$ valós számok esetén a

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = \log_a(x_f) \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \log_b(y_f)} \quad (45)$$

koordináta-transzformáció után pontosan (kizárólag) az

$$\boxed{y = h(x) = d \cdot x^\gamma} \quad (46)$$

alakú (**hatvány**) függvények ($0 < d, x$) grafikonjai egyenesek (geometriailag), vagyis

$$y_t = m \cdot x_t + b .$$

Érvényes továbbá:

$$m = \gamma \cdot \log_b(a) \quad \text{és} \quad b = \log_a(d) \cdot \log_b(a) , \quad (47)$$

vagy másképpen:

$$\gamma = \frac{m}{\log_b(a)} \quad \text{és} \quad d = b^b \quad (48)$$

Megjegyzés: a γ kitevő tetszőleges valós szám lehet, nem csak egész szám.

Bizonyítás. A (46) egyenlőség mindkét oldalának $\log_a$ -át vesszük:

$$\log_a(y_f) = \log_a(d \cdot x_f^\gamma) = \gamma \cdot \log_a(x_f) + \log_a(d) ,$$

majd a (45) és

$$\log_a(y_f) = \frac{\log_b(y_f)}{\log_b(a)} = \frac{y_t}{\log_b(a)}$$

összefüggések alapján kapjuk, hogy

$$\frac{y_t}{\log_b(a)} = \gamma \cdot x_t + \log_a(d) ,$$

vagyis

$$y_t = m \cdot x_t + b ,$$

ahonnan (47) és (48) már leolvasható:

$$\log_a(d) = \frac{b}{\log_b(a)} = b \cdot \log_a(b) = \log_a(b^b)$$

tehát valóban $d = b^b$. ■

A fenti koordináta-transzformációt **logaritmikus** transzformációnak nevezzük, és (φ_L, ψ_L) jellel jelöljük.

4.6. A normális eloszlás

A legtöbb természeti (fizikai, kémiai, vagy akár közgazdasági) jelenség mennyisége **normális eloszlást** "követ" (erről részletesebben bármely *Valószínűség-számítás-Statisztika* könyvben, tantárgyban olvashatunk, pl. [LZ75], vagy a [W06], [W07] honlapokon). A normális eloszlású mennyiségek **eloszlásfüggvénye** (= a mérések *kumulatív* [kezdetektől a jelen pillanatig] *összegezése*) a következő képlettel írható le:

$$F_{m,\sigma}(z) = \Phi\left(\frac{z-m}{\sigma}\right),$$

ahol m a mérés átlaga, és σ a szórása, és

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (49)$$

A $\Phi(x)$ függvényt sokszor "*Gauss-féle* *hibafüggvénynek*" is nevezik, és $\text{erf}(x)$ -el jelölik. A (9) ábrán a mérési eredmények is *közelítőleg* a Φ függvény szerint helyezkednek el, pontosabb grafikonokat látunk [W07] -ben a *Cumulative distribution function*) (kumulatív eloszlásfüggvény) címszónál.

A gyakorlatban nagyon fontos egy jelenségről mérésekkel eldönteni, hogy tényleg normális eloszlást követ-e egyáltalában! Ha igen, akkor mekkorák a z m és σ paraméterek? Mint a (9) és (10) ábrákon szemléltettük: "mindössze" csak az y tengelyt kell "megfelelően" megnyújtanunk (vagy zsugorítanunk). Hogyan?

Tudomásom szerint a táblázatkezelő programok (Excel, Libre Office) *nem* rendelkeznek Normális eloszlás koordinátarendszerrel, azonban [HM15] programja igen!

Mint a 4.2. alfejezet 5. Tételében beláttuk: mindössze a (24) transzformációt kell alkalmaznunk. Mivel az F függvény most Φ , ezért (24) most a következőt jelenti:

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = x_f \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \Phi^{-1}(y_f)}. \quad (50)$$

Természetesen az 5. Tétel képleteiben F helyett Φ , a b paraméter helyett pedig σ -t kell írunk, m marad m .

A kapott rendszert **normális-** vagy **Gauss- koordinátarendszernek** nevezik, és (φ_N, ψ_N) jellel jelöljük. A (10) ábrán a régen kapható "Gauss-papír" -ra rajzoltuk mérési eredményeinket (forrás: [LZ75]).

A normális koordinátarendszer elkészítéséhez már csak a $\Phi(x)$ függvény *inverzét* kellene kiszámolnunk (vagy használjuk a [HM15] programot).

Azonban, **Liouville** tétele szerint: $\Phi(x)$ -re *nincs* képlet, a szokásos függvényekkel. Liouville tételét megtalálhatjuk például [SzM11] 126. oldalán.

Emiatt $\Phi(x)$ értékeit *táblázatból* szokták kikeresni, a táblázat (szinte) minden *Valószínűségszámítás* könyvben megtalálható, vagy ld. [SzI10]. Például az $s = 0.999$ felirat körülbelül $t = \Phi^{-1}(0.999) \approx 3.9$ egységre (pl. centiméter) lesz távol az x tengelytől. Az x és y tengely metszéspontjába (régén: "origó") az $s = 0.5$ felirat lesz, mert $t = \Phi^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$ egység. Liouville tétele miatt nincs képlet Φ inverzére sem, a Φ^{-1} függvényre sem, tehát egyik módszer a táblázat alapján kikeressük (pontosabban: "visszakeressük") az $s = 0.01$, ... $s = 0.99$ értékeket,

Mivel a legtöbb táblázat csak körülbelül a $0 \leq x < 4$ számokat tartalmazza, szükségünk van a $\Phi(x)$ függvény legfontosabb tulajdonságaira (például [W06], [W07]):

13. Tétel. $Dom(\Phi) = \mathbb{R}$, $0 < \Phi(x) < 1$, *szigorúan monoton növekvő, folytonos*, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$.

Ezenkívül még (Φ specialitásai): $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ és Φ grafikonja középpontosan szimmetrikus a $(0, \frac{1}{2})$ pontra, vagyis

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad . \quad (51)$$

Az (51) összefüggés miatt az y tengely skálázása az x tengely "alatt" hasonlít az x tengely "fölötti" rész skálázásához, például az $s = 0.001$ felirat körülbelül $t = \Phi^{-1}(0.001) \approx -3.9$ egységre (pl. centiméter) lesz.

A táblázat nincs mindig nálunk, a számológépen sincs ilyen gomb. Létezik azonban egy másik módszer, sajnos kevésbé ismert, pedig nagyon hasznos és modern. Az [RA97] cikkben a következőt olvashatjuk:

$$y = \Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \tanh(0.8x) \quad (52)$$

ahol $\tanh(z)$ a "tangens hiperbolikus" függvény, többféle jelölése van: $\tanh(z) = \tanhyp(z) = th(z)$, és képlete:

$$\tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (z \in \mathbb{R}) \quad . \quad (53)$$

A hiperbolikus függvények és inverzeik egy rövid ismertetője megtalálható például [Szi03]-ban, többek között:

$$-1 < \tanh(z) < +1 \quad (z \in \mathbb{R}) \quad (54)$$

és

$$\tanh^{-1}(v) = \operatorname{Arth}(v) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \quad (-1 < v < +1) \quad (55)$$

hiszen $\tanh^{-1}$ (=tanh inverze) szokásos neve "*area tangens hiperbolicus*".

Az (52) és (55) egyenlőségekből

$$x = \Phi^{-1}(y) \approx \frac{10}{8} \cdot \tanh^{-1}(2y-1) \quad (56)$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+(2y-1)}{1-(2y-1)} \right) \quad (57)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \ln \left(\frac{y}{1-y} \right) \quad (-1 < y < +1) \quad (58)$$

vagyis a *Gauss-* azaz *Normális* koordinátarendszerben az y tengelyre az s feliratot

$$t = \Phi^{-1}(s) \approx \frac{5}{8} \cdot \ln \left(\frac{s}{1-s} \right) \quad (-1 < s < +1) \quad (59)$$

távolságra kell helyoznunk!

Ez a képlet van "beépítve" a [HM15] programba is, tehát a nekünk (a felhasználóknak) nem kell $\tanh$ függvénnyel és az (52)-(59) képletekkel bajlódnunk!

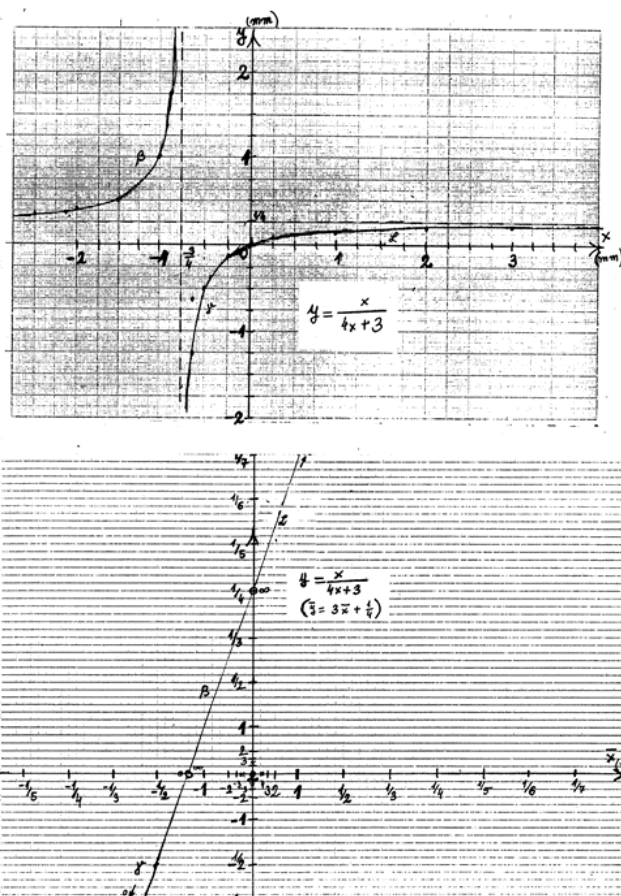
4.7. A reciprok koordinátarendszer

Most a **reciprok skálát** használjuk:

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = \frac{u}{x_f} \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \frac{v}{y_f}}. \quad (60)$$

Hiperbolikus rendszernek is nevezhetjük, mert ekkor a (bizonyos)

$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ hiperbolák grafikonjai lesznek egyenes-darabok:



A reciprok koordináta-rendszer

(61)

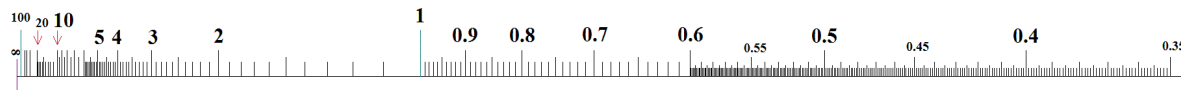
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/reciprok-skala-160.gif>

Vigyázat: a koordinátatengelyek beosztása most *monoton csökkenő*, de a legfurcsább az, hogy a tengelyeken a $0 = \frac{1}{\infty}$ szám helyett " ∞ " szerepel, vagyis a tengelyekre nemlétező pontokat rajzoltunk! Szemléletesen ezt úgy is mondhatnánk, hogy a síkot "kifordítottuk": az origó "elrepült" a végtelenbe, és a végtelen távoli pontok jöttek be a koordinátatengelyekre, az origóba pedig az (∞, ∞) pont, vagyis akinek mindkét koordinátája ∞ volt, azaz a 0

helyet cserélt a ∞ -el.

A síknegyedek és az előjelek megmaradnak, mint a szokásos koordináta-rendszerben, de a tengelyeken levő pontok koordinátái nem valós számok (mert $\frac{1}{0}$ értelmezhetetlen).

Az Olvasónak elkészítettünk egy **reciprok skálát**, mert az interneten nem találtunk:



A reciprok skála

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/Recipr-skala1jav.gif>

Ha két (iskolai) vonalzóra a szokásos mm -beosztás helyett a most vizsgált *reciprok skálákat* rajzoljuk, akkor a kapott, logarléchez ((6), [W02]) hasonló eszközt kapunk, amellyel az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

egyenletben szereplő számokat tudjuk pillanatok alatt meghatározni. Erről részletesebben [Szi06] -ben olvashatunk.

14. Tétel. *A (60) transzformáció esetén pontosan a*

$$h(x) = \frac{ax}{cx + d} \quad (62)$$

azaz

$$h(x) = \frac{a}{c} + \frac{\beta}{x + \gamma} \quad (63)$$

hiperbolák grafikonjai lesznek egyenes-darabok, amennyiben

$$a\gamma + c\beta = 0 \quad .$$

Továbbá: ha egy $h(x)$ függvény grafikonja $y_t = mx_t + b$ alakú, akkor a h függvény (62) képletében

$$a = v \quad , \quad c = m \quad \text{és} \quad d = b \quad . \quad (64)$$

A felrajzolt "koordinátatengelyek" valójában nemlétező pontokat "jelölnek", ezért a kapott egyenes valójában három darabból áll, mint ezt a (61) ábrán láthatjuk. Erre utaltunk a fenti tétel "egyenes-darabok" kifejezésével.

15. Megjegyzés. A fenti (62) és (63) képletek könnyen egymásba alakíthatók (még általánosabban is):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) - \frac{a}{c} \cdot d + b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{a}{c} \cdot d}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b - \frac{a}{c} \cdot d}{c}}{x + \frac{d}{c}},$$

$$\text{vagyis } \beta = \frac{b - \frac{a}{c} \cdot d}{c} \text{ és } \gamma = \frac{d}{c}, \quad b=0 \text{ esetén } \beta = \frac{-ad}{c^2}.$$

Megfordítva:

$$\frac{a}{c} + \frac{\beta}{x + \gamma} = \frac{a(x + \gamma)}{c(x + \gamma)} + \frac{c\beta}{c(x + \gamma)} = \frac{ax + (a\gamma + c\beta)}{cx + c\gamma},$$

$$\text{vagyis } b = a\gamma + c\beta \text{ és } d = c\gamma. \quad \square$$

Bizonyítás. Ha $y_f = \frac{ax_f}{cx_f + d}$, akkor

$$y_t = \frac{v}{y_f} = \frac{v \cdot \left(c \cdot \frac{u}{x_t} + d \right)}{a \cdot \frac{u}{x_t}} = \frac{vcu + vdx_t}{au}, \quad \text{azaz}$$

$$y_t = \frac{vc}{a} + \frac{vd}{au} \cdot x_t,$$

ami valóban $y_t = mx_t + b$ alakú (és $m = \frac{vd}{ua}$, $b = \frac{vc}{a}$).

Megfordítva: ha $y_t = mx_t + b$, akkor

$$y_f = \frac{v}{y_t} = \frac{v}{mx_t + b} = \frac{v}{m \cdot \frac{u}{x_f} + b} = \frac{vx_f}{mu + bx_f} = \frac{ax_f}{cx_f + d},$$

ahonnan (64) már látható. ■

4.8. Általános összefüggések

Természetesen az x és y tengelyek transzformációi (φ és ψ) összefüggenek, sőt bármelyikkel helyettesíthetjük a másikat, vagy módosíthatjuk a másik hatását.

Ez a fejezet elsősorban elméletileg fontos, mérnökök és érdeklődők nyugodtan átugorhatják. Emlékeztetünk rá, hogy a (φ, ψ) -"koordinátarendszer" (**KR**) elnevezés azt rövidíti, hogy φ az x tengelyen van ($\varphi(x_f) = x_t$) és ψ az y tengelyen ($\psi(y_f) = y_t$), lásd (13). A tételeket most nem bizonyítjuk.

16. Tétel. *Ha a (φ, ψ) -koordinátarendszerben a $h(x)$ függvények egyenesednek ki (linearizálód(nak)), akkor a (ψ, φ) -koordinátarendszerben a $h^{-1}(x)$ függvények¹⁾. $\square$*

17. Megjegyzés. *A fenti tételt röviden úgy is mondhatjuk, hogy "a tengelyeken φ -t és ψ felcserélve a linearizálódó h függvények invertálód(nak)".*

*A tétel speciális esetét a 4.4.1. és 4.4.2. alfejezetekben már tapasztaltuk, hiszen a logaritmikus függvények pontosan az exponenciális függvények speciális esetei. A (2) és (30) koordinátarendszereket is a **papír megfordításával** kaptuk, és függvények inverzeinek grafikonjait szintén a papír megfordításával "állíthatjuk elő" (ld. pl. [SzI04], [SzM11])! Vagyis nincs mit csodálkoznunk (?bebizonyítottuk a tételt?).*

A 4.5. és 4.7. alfejezetekben, valamint a 4.9. fejezet alfejezeteiben $\varphi = \psi$ (azaz $\varphi(z) = a \cdot \psi(bz + c) + d$). Az ilyen koordinátarendszerekben (a józan ész szerint) a kiegyenesedő függvények halmaza nem változhat meg. Ez így is van, de ez nem azt jelenti, hogy mindegyik h függvény inverze saját maga, hanem csak azt, hogy mindegyik $h \in \mathcal{H}$ függvény inverze is a $\mathcal{H}$ halmazban van (lásd az 1. lábjegyzetet). $\square$

18. Tétel. *Az (id, ψ) és a (ψ^{-1}, id) koordinátarendszerekben ugyanazok a függvények linearizálód(nak). (Emlékeztetünk, hogy id az " $y = x$ " függvény²⁾, vagyis a fenti két KR-ben $x_f = x_t$ illetve $y_f = y_t$.) $\square$*

A fenti összefüggést gondoljuk át a 4.4., 4.6. és 4.9. alfejezetekben megvizsgált koordinátarendszerek esetében!

¹⁾ **Pontosabban:** Ha a (φ, ψ) KR-ben a $\mathcal{H}$ függvényhalmaz $h \in \mathcal{H}$ elemei egyenesednek ki, akkor a (ψ, φ) KR-ben a $\mathcal{H}^{-1} := \{h^{-1} : h \in \mathcal{H}\}$ függvényhalmaz elemei.

²⁾ **identitás, azonosság** vagy **helybenhagyás** függvény

4.9. További koordinátarendszerek

A továbbiakban csak felsorolunk néhány további lehetséges koordinátarendszert: tetszőleges szigorúan monoton, lehetőleg folytonos φ és ψ függvényt, és csak válaszoljuk a kiegyenesíthető függvényeket. A 4.2. és 4.3 alfejezetekben tárgyalt esetekkel (vagyis amikor csak az egyik tengelyt módosítjuk) most nem foglalkozunk.

Várjuk az Olvasók további javaslatait, ötleteit, tapasztalatait.

4.9.1. Exponenciális skálák

Legyen most

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = c^{x_f} \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = d^{y_f}} \quad (65)$$

vagy megfordítva:

$$x_f = \varphi^{-1}(x_t) = \log_c(x_t) \quad \text{és} \quad y_f = \psi^{-1}(y_t) = \log_d(y_t) .$$

A a alapú exponenciális függvényekre szokás az $\exp_a$ jelet is használni, tehát most $\varphi = \exp_c$ és $\psi = \exp_d$. A (20) összefüggés alapján ekkor

$$y_f = h(x_f) = \psi^{-1}(m \cdot \varphi(x_f) + b) = \log_d(m \cdot c^{x_f} + b) ,$$

vagyis pontosan az

$$\boxed{y = h(x) = \log_d(m \cdot c^x + b)} \quad (66)$$

alakú függvények grafikonjai lesznek egyenesek. Például az $y = \log_2\left(\frac{1}{2} \cdot 3^x + 4\right)$ függvény eredeti ("szokásos"), Descartes-koordinátarendszerbeli képe: A $b = 0$ *speciális esetben* a fenti (66) képlet egyszerűbbé válik:

$$y = h_{spec}(x) = \log_d(m) + x \cdot \log c^x = \beta + \mu \cdot x .$$

4.9.2. Hatványfüggvény skálák

Legyen most

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = (x_f)^c \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = (y_f)^d} \quad (67)$$

vagy megfordítva:

$$x_f = \varphi^{-1}(x_t) = \sqrt[c]{x_t} \quad \text{és} \quad y_f = \psi^{-1}(y_t) = \sqrt[d]{y_t} .$$

ahol $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges nemnulla (akár negatív, akár pozitív rögzített szám).

Mivel különböző (1 -nél nagyobb vagy kisebb abszolút értékű, negatív vagy pozitív) c és d kitevőkre ez a transzformáció nagyon változatos ábrákat mutat, ezért javasoljuk az Olvasónak, hogy "játszadozzon" kicsit a [HM15] programmal.

A $c = d = -1$ speciális eset a reciprokok skála, melyet a 4.7. alfejezetben vizsgáltunk meg részletesen.

A [SzKV01], [SzKV02], [SzKV03] kutatási közleményben pedig a (térbeli) $c = d = e = \frac{1}{2}$ speciális esetet használtuk: ekkor síkokból gömböket "varázsolt" a transzformáció.

Milyen h függvények grafikonjai lesznek egyenesek a (67) koordináta-rendszerben? Használjuk megint a (20) képletet:

$$y_f = \psi^{-1}(m \cdot \varphi(x_f) + b) = \sqrt[d]{m \cdot (x_f)^c + b}$$

vagyis

$$\boxed{y = h(x) = \sqrt[d]{m \cdot x^c + b}}.$$

Speciálisan: $d = c = 2$ és $m < 0 < b$ esetén az

$$y^2 - mx^2 = b$$

ellipszisek ($m = -1$ esetén körök), $0 < m$ esetén pedig *hiperbolák képei* egyenesednek ki a (67) transzformáció után.

"Megfordítva" pedig: az

$$y_f = \ell(x_f) = mx_f + b,$$

eredetileg lineáris (egyenes) grafikonú függvények képei a $d = c = \frac{1}{2}$, vagyis az $(x_t)^2 = x_f$ és $(y_t)^2 = y_f$ transzformáció után válnak ellipszisekké (körökké) illetve hiperbolákká. Az [SzKV01], [SzKV02], [SzKV03] művekben szép térbeli ábrákat láthatunk.

4.9.3. Arkusztangens skálák

Most

$$\boxed{x_t = \varphi(x_f) = \arctg(u \cdot x_f) \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \arctg(v \cdot y_f)} \quad (68)$$

vagy megfordítva:

$$x_f = \varphi^{-1}(x_t) = \frac{tg(x_t)}{u} \quad \text{és} \quad y_f = \psi^{-1}(y_t) = \frac{tg(y_t)}{v} ,$$

ahol az $arctg$ függvény a tg (tangens) függvény inverze.

Sok más nyelven és a számítástechnikában használatosak még az $atan$, $arctan$, $\tan^{-1}$, stb. jelölések is.

A (20) képlet szerint:

$$y_f = \psi^{-1}(m \cdot \varphi(x_f) + b) = \frac{tg(m \cdot arctg(ux_f) + b)}{v} ,$$

vagyis a

$$h(x) = \frac{tg(m \cdot arctg(ux) + b)}{v}$$

alakú függvények képei lesznek egyenesek a (68) koordinátarendszerekben.

4.9.4. Tangens hiperbolikus skálák

Minden trigonometrikus függvénynek van *hiperbolikus* megfelelője, melyeket valóban a **Bolyai János** által felfedezett *hiperbolikus* geometriában használnak. Érdemes Bolyai János művébe belekukkantanunk: [BJ1832] a *hyp* függvényeket is megtaláljuk benne.

Szerencsére a hiperbolikus függvényeket a (szokásos) Descartes-koordináta-rendszerben is tanulmányozhatjuk: "sima" $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, a képleteket, tulajdonságokat, ábrákat megtalálhatjuk pl. [SzI03]-ban.

Legyen most

$$x_t = \varphi(x_f) = \tanh(u \cdot x_f) \quad \text{és} \quad y_t = \psi(y_f) = \tanh(v \cdot y_f) \quad (69)$$

vagy megfordítva:

$$x_f = \varphi^{-1}(x_t) = \frac{Arth(x_t)}{u} \quad \text{és} \quad y_f = \psi^{-1}(y_t) = \frac{Arth(y_t)}{v} .$$

[SzI03] alapján

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} , \quad (70)$$

és inverze

$$\tanh^{-1}(x) = \text{Arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (-1 < x < +1) \quad (71)$$

Vigyázat: $\tanh$ (70) képletében $x \in \mathbb{R}$, de $1 < \tanh(x) < +1$ miatt Arth fenti (71) képletében szükséges az $-1 < v < +1$ kikötés!

Sok más nyelven és a számítástechnikában használatosak még a tgh , $tghyp$, tanhyp , atanhyp , Areatg (nem arctg !), Artan , stb. jelölések is.

A (20) képlet szerint pontosan az

$$y_f = \psi^{-1}(m \cdot \varphi(x_f) + b) = \frac{\text{Arth}(m \cdot \tanh(u \cdot x_f) + b)}{v}$$

vagyis az

$$\boxed{y = h(x) = \frac{\text{Arth}(m \cdot \tanh(u \cdot x_f) + b)}{v}} \quad (72)$$

alakú függvények grafikonjai lesznek a (69) transzformáció után egyenesek.

A fenti (72) formula a (70) és (71) képletek segítségével kívánságra "visszaírhatók" az e^x és $\ln(x)$ függvényekre.

4.9.5. Lognormális skálák

A 4.6. alfejezethez hasonlóan most legyen

$$x_f = \Phi(\ln x_t) = \varphi^{-1}(x_t) = \quad \text{és} \quad y_f = \Phi(\ln y_t) = \psi^{-1}(y_t) , \quad (73)$$

azaz

$$\boxed{x_t = e^{(\Phi^{-1}(x_f))} = \varphi(x_f) \quad \text{és} \quad y_t = e^{(\Phi^{-1}(y_f))} = \psi(y_f)} . \quad (74)$$

A φ és ψ függvényeket írhatjuk a könnyebben olvasható

$$\varphi(x_f) = \exp(\Phi^{-1}(x_f)) \quad \text{és} \quad \psi(y_f) = \exp(\Phi^{-1}(y_f))$$

formában is ($\exp(z) = e^z$).

Az (52)-(59) összefüggések alapján

$$x_f = \varphi^{-1}(x_t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_t^{0.8} - x_t^{-0.8}}{x_t^{0.8} + x_t^{-0.8}} , \quad y_f = \psi^{-1}(y_t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_t^{0.8} - y_t^{-0.8}}{y_t^{0.8} + y_t^{-0.8}}$$

és

$$x_t = \varphi(x_f) \approx \left(\frac{x_f}{1-x_f}\right)^{5/8}, \quad y_t = \psi(y_f) \approx \left(\frac{y_f}{1-y_f}\right)^{5/8} \quad (-1 < x_f, y_f < +1), \quad (75)$$

hiszen

$$\exp\left(\frac{5}{8} \cdot \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right) = \left(\frac{u}{1-u}\right)^{5/8}. \quad (76)$$

A *lognormális eloszlások* alkalmazásairól például [MB00] és [MBSP05]-ben olvashatunk.

5. Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatási eredmények megjelenését a „**Telemedicina fókuszú kutatások Orvosi, Matematikai és Informatikai tudományterületeken**” című, *TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0073* számú projekt támogatja. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Hivatkozások

- [BA57] **Balogh Arthur:** *A logarléc*, Műszaki Kiadó, 1957,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/Balogh-Logkonyvf.jpg>
- [BJ1832] **Bolyai János:** *Appendix*. Megjelent: **Bolyai Farkas:** *Tentamen* könyvének függelékében:
<http://mek.oszk.hu/06500/06507/pdf/tentamen3.pdf>
- [DISP1] **Stanislas Dehaene, Véronique Izard, Elizabeth Spelke, Pierre Pica:** *Slide Rule Sense: Amazonian Indigenous Culture Demonstrates Universal Mapping Of Number Onto Space*, Date: May 30, 2008,
<http://www.sciencedaily.com/releases/2008/05/080529141344.htm>

- [DISP2] **Stanislas Dehaene, Véronique Izard, Elizabeth Spelke, Pierre Pica:** *Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures*, Science, 2008; 320 (5880): 1217 DOI: 10.1126/science.1156540, <http://www.sciencemag.org/content/320/5880/1217>, <http://www.sciencemag.org/content/320/5880/1217.full>
- [FV92] *Földrajzi világatlasz*, Kartográfia, 1992.
- [GJ75] **Gróf József:** *Matematika V. (Differenciálegyenletek)*, Veszprémi Vegyipari Egyetem, 1975, <http://webshop.uni-pannon.hu/...>
- [HM15] **Horváth Márton:** *Linearizáló koordinátatranszformációk számítógépes támogatása*, Szakdolgozat, Pannon Egyetem, 2015, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szakdolgozat-HM-150511.pdf>, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/HMarton.zip>
- [KE11] **Karsai János, Eller József:** *Matematika gyakorló feladatok élettudományi hallgatók számára 4.*, <http://www.model.uszeged.hu/data/etc/edoc/tan/JKarsai8/gytk-gyak-04.pdf>
- [LZ75] **László Zoltán:** *Matematika VII. (Valószínűségszámítás)*, Veszprémi Vegyipari Egyetem, 1975.
- [MB00] **Mihálykó Csaba - Blickle Tibor:** *On the approximation of the lognormal distribution*, The Mathematical Gazette, vol. 84. Number 500, July 2000. Note 84.48., pp.308-311.
- [MBSP05] **Mihálykó Csaba - Blickle Tibor -Süle Zoltán -Bezegh András:** *Eloszlások közelítése tangenshiperbolikus eloszlással*, Műszaki Kémiai Napok 2005.
- [RA97] **Robin, A.C.:** *A quick approximation to the normal integral*, The Mathematical Gazette, 81 (1997), 95-96, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/FiKozelit-sz+cim.gif>
- [SzI01] **Szalkai István:** *Szemléletes analízis I*, Tankönyvtár, 2011, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf>, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/adatok.html ,

- http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/2010-0012_szemleletes_analizis.pdf
- [SzI02] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Pannon Egyetemi Kiadó, 2000. <http://webshop.uni-pannon.hu/...>
- [SzI03] **Szalkai István:** *Hiperbolikus függvények alaptulajdonságai*, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Hypfvmind-.doc>
- [SzI04] **Szalkai István:** *Mindennapi matematika*, kézirat, 2013, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi_mat-kivonat.pdf ,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Mindennapi-cl-120403.jpg> ,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/>
- [SzI05] **Szalkai István:** *Műszaki problémáink minden nap*, interaktív oktatási segédanyag, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/MindMusz/Mindennapi-musz-start-2c.html>
- [SzI06] **Szalkai István:** *Mit tudhat egy számológép?*, KöMaL 54/4 (1977/4), 146-151,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704146.g4.png> ,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704147.g4.png> ,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704148.g4.png> ,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704149.g4.png> ,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704150.g4.png> ,
<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704151.g4.png>
- [SzI07] **Szalkai István:** *Szemléltetés és becsapás*, Haladvány Kiadvány, 2012, <http://www.math.bme.hu/~hujter/120415.pdf>
- [SzI08] **Szalkai István:** *Ferde fényképezés*, Haladvány Kiadvány, 2015, <http://www.math.bme.hu/~hujter/150619.pdf>
- [SzI09] **Szalkai István:** *Ki fedezte fel?*, Haladvány Kiadvány, 2015, <http://www.math.bme.hu/~hujter/150720.pdf>
- [SzI10] **Szalkai István:** *A normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata*, <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/NormTabl.pdf>

- [SzKV01] **Szalkai István, Kovács Zoltán, Volf Péter:** *3D Visualization of a Case-Based Distance Model*, Probl. Manag. in the 21st Cent. (PMC), 2011/2, 182-197. ISSN 2029-6932,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szalkai-2011f-PMC-scan.pdf>,
<http://journals.indexcopernicus.com/abstracted.php?level=5&icid=969319>
- [SzKV02] **Szalkai István, Kovács Zoltán, Volf Péter:** *Visualization of Multicriterial Classification: A Case Study*, in: "Human Factors of Global Society: a System of Systems Perspective", by Mark T., Karwowski W., Frankowicz M., Kantola, J., Zgaga P. (eds.), Taylor and Francis, 145-158. old., ISBN:978-1-4665-7286-7,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szalkai-2013b-monogr-VolfP.pdf> ,
<http://www.crcpress.com/product/isbn/9781466572867> ,
<http://www.google.hu/books?hl=hu&lr=&...>
- [SzKV03] **Szalkai István, Kovács Zoltán, Volf Péter:** *Multicriterial Inventory Analysis with MATLAB Application*, *Global Journal on Technology*, Vol 3 (2013), pp. 1812-1821,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szalkai-2013c-MatLabAwer.pdf> ,
<http://www.world-education-center.org/index.php/P-ITCS> ,
<http://www.world-education-center.org/index.php/P-ITCS/article/view/2022>
- [SzK08] **Szalkai István, Koltay László:** *Analízis I. feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetem, 2009, <http://webshop.uni-pannon.hu/...>
- [SzM11] **Szalkai István, Mikó Teréz:** *A közgazdaságtan matematikai alapjai*, Pannon Egyetem, 2011,
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-c.pdf>
- [W01] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordináta-rendszer>
- [W02] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Logarléc>
- [W03] https://hu.wikipedia.org/wiki/Logaritmus#Logaritmikus_skálák
- [W04] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Logaritmus#Grafikonok>

- [W05] https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_scale
- [W06] https://hu.wikipedia.org/wiki/Normális_eloszlás
- [W07] https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
- [W08] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Rádióhullám>