Haladvány Kiadvány 2015.09.30

Három a harmadikon és az aranymetszés

Hujter Mihály

Ajánlás: A jelen írást a szerző fiának huszonhetedik születésnapjára ajánlja

Tekintsünk egy $ABCD$ négyzetetet, melynek oldalhossza legyen mondjuk $1+\sqrt{5}$. Később ki fog derülni, hogy miért szerencsés ez a választás. Az AB oldalon vegyünk fel egy P pontot, a DA oldalon pedig egy Q pontot úgy. Az AB távolságot jelölje p, a DQ távolságot jelölje q. Most behúzva a PC és a QC szakaszokat a négyzet területét négy darab háromszögre bontottuk. Lehetséges-e, hogy a négy háromszög területe egyenlő? Ki fog derülni, hogy nem. De az lehetséges lesz, hogy a QAP, a QBC és a CDP háromszögek területe megegyezzen. Ezen területek kétszeresét rendre felírva: $(1+\sqrt{5}-q)p$, $(1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5})$, $(1+\sqrt{5})q$. A következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{5}-q)p &= (1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5})\\(1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})q\end{aligned}$$

Pozitív p-re az egyenletrendszernek egy megoldása is van: $p=2, q=\sqrt{5}-1$. Tehát a négy háromszög közül háromnak a területe:

$$\frac{(1+\sqrt{5})\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}=2$$

Mivel a négyzet területe $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$, ezért a negyedik háromszög területe:

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^2-3\cdot 2=2\sqrt{5}$$

Mindazonáltal $1 : 1 : 1 : \sqrt{5}$ arányban tudtuk felosztani a négyzet területét. Ehhez a P és Q pontok helyzetét úgy kellett megválasztani, hogy az AB illetve a DA oldalakat aranymetszés szerint osszák két részre, hiszen

$$\begin{aligned}
\frac{p}{1+\sqrt{5}-p} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}-2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{p} = \frac{p}{q} \\
\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-q} &= \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}{q}
\end{aligned}$$

Most kérdezzük meg a következőt: Hogyan kell megválasztani a p és q értékeket, hogy a tekintett háromszögek közül az első három területe számtani és mértani közepe is 2 legyen? A következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{5}-q)p + (1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})q &= 12 \\
(1+\sqrt{5}-q)p \cdot (1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5}) \cdot (1+\sqrt{5})q &= 64
\end{aligned}$$

Ennek a megoldása ugyanaz, mint az előbb!

A három háromszögre vonatkozó harmadik kérdésünk legyen a következő: Hogyan kell megválasztani a p és q értékeket, hogy a tekintett háromszögek közül az első három területe számtani és négyzetes közepe is 2 legyen? A következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{5}-q)p+(1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})q &= 12\\ \Big((1+\sqrt{5}-q)p\Big)^2+\Big((1+\sqrt{5}-p)(1+\sqrt{5})\Big)^2+\Big((1+\sqrt{5})q\Big)^2 &= 48\end{aligned}$$

Ennek a megoldása is ugyanaz, mint az előbb!