Haladvány Kiadvány 2015.10.21

Négy lány vagy négy fiú egy családban kész paradoxon

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

.

Ez az írás azért született, mert a szerző többször is találkozott különböző példatárakban a következő feladvánnyal: *Mi annak a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban minden gyermek lány?* A feladatra szokásosan elvárt válasz:

$\frac{1}{16}$, hiszen egymástól függetlenül minden gyermek $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lány. Ezzel megoldással és indoklással látszólag nincs is semmi baj. Valójában azonban mégis helytelen. Itt most ezt a kérdéskört járjuk körbe.

Először induljunk ki abból a feltevésből, hogy egy adott p-re éppen p annak a valószínűsége, hogy egy családba, ahol már volt legalább egy gyerek és ahova éppen most érkezett egy újabb újszülött, nem születik már további gyerek soha, feltéve, hogy a meglévő gyermekek mind azonos neműek. De ha már van fiú is és lány is a családban, akkor ez a valószínűség legyen q. Általános megfigyelés, hogy két fiú vagy két lány után hamarabb jön a harmadik gyermek, mint egy fiú és egy lány után. Feltételezzük tehát, hogy $0 < p < q < 1$. Sőt minden újabb gyermek esetében ezeket a p és q valószínűségeket az összes többi esettől teljesen függetlenül értjük.

Azokat a családokat vizsgáljuk, ahol már van legalább két gyerek. Minden gyerek $\frac{1}{2}$ eséllyel fiú, $\frac{1}{2}$ eséllyel lány. A második gyermek születéséig a gyermekek neme egyforma eséllyel FF, FL, LF, LL. Az FF és LL családokban $1-p$ valószínűséggel fog harmadik gyermek születni. Tehát a harmadik gyermek születésekor az FFF, FFL, LLF és LLL családok mindegyikének esélye egyformán $\frac{1-p}{8}$. Hasonló megfontolással kapjuk azt, hogy az FLF, FLL, LFF, LFL családok esélye $\frac{1-q}{8}$. Az FFF és az LLL családok p valószínűséggel megmaradnak háromgyerekesnek, az FFL, LLF, FLF, FLL, LFF és LFL családok pedig q valószínűséggel állnak le a harmadik gyereknél. Ennek megfelelően a negyedik gyermek megszületésénél az FFFF, FFFL, LLLF, LLLL családok esélye egyformán $\frac{(1-p)^2}{16}$ a kiindulási, valamikor még kétgyermekes átlagos családokra vonatkoztatva. Az FFFF és LLLL családok p valószínűséggel maradnak meg négygyermekesnek, az FFFL és LLLF családok pedig q valószínűséggel. A többi négygyermekes család esetében pedig az $\frac{(1-q)^2 q}{16}$

esély jött ki a $16-(2+2)=12$ variáció mindegyikére, tehát összesen $\frac{3(1-q)^2q}{4}$ esély.

Kiindultunk tehát azokból a családokból, ahol éppen a második gyermek született meg, és ezen családok között

$$\frac{2(1-p)^2(p+q)}{16}+\frac{3(1-q)^2q}{4}=\frac{(1-p)^2(p+q)+6(1-q)^2q}{8}$$

arányban találjuk a pontosan négygyermekeseket. Az eredei kérdésre — azaz hogy mi az esély egy négygyermekes családban a négy lányra — a helyes válasz tehát

$$\begin{aligned} f(p,q) &= \frac{\frac{1}{16}\cdot(1-p)^2p}{\frac{1}{8}\cdot\Big((1-p)^2(p+q)+6(1-q)^2q\Big)} \\ &= \frac{(1-p)^2p}{2(1-p)^2(p+q)+12(1-q)^2q} \end{aligned}$$

A $p = q$ esetben ez valóban kiadná az eredeti választ, node abból indultunk ki, hogy $p < q$. Nézzük meg, mit ad ki például a $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{4}$ értékválasztás:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{(1-\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2}}{2(1-\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}) + 12(1-\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{19} \approx 0.1053$$

Ez tehát lényegesen nagyobb valószínűség, mint az eredeti $\frac{1}{16} = 0.0625$ esély. De például a $p = \frac{5}{8}$, $q = \frac{9}{10}$ választással még jobbat érhetünk el:

$$f\left(\frac{5}{8}, \frac{9}{10}\right) = \frac{(1-\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{5}{8}}{2(1-\frac{5}{8})^2(\frac{5}{8}+\frac{9}{10}) + 12(1-\frac{9}{10})^2 \cdot \frac{9}{10}} = \frac{625}{3818} \approx 0.1637$$

Ez az eredetileg számított esélynek a $\frac{625}{3818} \cdot 16 = \frac{5000}{1909} \approx 2.62$-szerese.

Még nagyobb valószínűségek is elérhetők, de ezekhez p értékét nagyon kicsinek, q értékét nagyon nagynak kellene megválasztani. Azok az értékválasztások azonban már nem lennének életszerűek. A $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{4}$ értékválasztást azonban nagyon is életszerűnek gondoljuk. Meggyőződésünk, hogy Európában az európai kulturáltságú szülőktől született gyermekek vonatkozásában a legnagyobb gond éppen abból származik, hogy q értéke túl magas! Kína esetében pedig mind p, mind q értéke elképesztően magas! Egy átlagos kínai nő második terhességéből származó lánymagzatra szinte biztos abortusz vár!

Egy nemrég elhunyt híres magyar tudós genetikus szerette volna úgy növelni a megszületett gyermekek számát hazánkban, hogy súgott volna a szülőknek, akiknek azonos nemű két gyerekük már van, hogy a harmadik gyermek neme mi lesz. Például ha két lány után a harmadik magzat is lány lett volna, a szülők kérhették volna az abortuszt, de a fiúmagzat esetében valószínűleg nem kérnék.

Ennek az ötletnek a morális vizsgálata itt nem áll szándékunkban — mivel ez nem egy etikai, hanem egy matematikai dolgozat — , csak azt vetjük itt fel, hogy a paradoxonunkat még tovább fejleszthetnénk, ha például az LL és FF esetben a szülők r valószínűséggel élnének a genetikus ajánlatával olyan értelemben, hogy számukra „kedvező" információ esetén elállnának az abortusz iránti igényüktől, szabad utat adnának az LLF és FFL variációknak. A nemek közti megkülönböztetést azonban még a matematikai modellben sem engednénk meg. Tehát a módosított modellben sem írhatnák elő a szülők, hogy fiú- vagy lánymagzat esetében kérik az abortuszt, ellenben a fennálló gyakorlatot, hogy a harmadik terhességnél a szülők már kérhetik az abortuszt, arra szigorítanánk, hogy csak a kismama két azonos nemű élő gyermeke esetében engedélyezhetné az állam a magzatelhajtást, de csak akkor, ha a magzat neme is ugyanaz lenne.

A genetikus doktor eredeti ötlete nyilván az, hogy ha az FF és LL családoknak nem kell félniük a számukra nem kívánatos FFF és LLL lehetőségektől, akkor talán bizonyos százalékban lemondanak a törvényileg neki „járó” abortusz lehetőségéről is, és pár százalékkal a harmadik gyermekek létszáma is növekszik. Az r paraméter értékét persze nem szabad túlbecsülni. A fenti modellünköz illeszkedően az FFL és az LLF családok részaránya a kétgyermekes családokhoz viszonyítva az eredetileg számított $2 \cdot \frac{1-p}{8} = \frac{1-p}{4}$ arányról felnövekedhet egy kicsivel többre, nevezetesen az FF illetve LL családok esetében a genetikus orvosprofesszor ötlete előtt csak két gyermeket vállaló családok r-szeresének felével, azaz $pr/4$ részaránnyal a legalább kétgyermekes családok arányában. Ezen családoknak aztán $(1-q)q$ hányada lesz pontosan négy gyermekes. A fenti kifejezésekben a

$$\frac{1}{8} \cdot \Big((1-p)^2(p+q) + 6(1-q)^2 q\Big)$$

kifejezés értékét tehát a genetikus ötlete nyomán növelni lehet a

$$\frac{pr(1-q)q}{4}$$

értékkel. Mindazonáltal a négygyermekes családokban a négy lány esélye ez lesz:

$$\frac{\frac{1}{16}\cdot(1-p)^2 p}{\frac{1}{8}\cdot\Big((1-p)^2(p+q)+6(1-q)^2 q\Big)+\frac{1}{4}\cdot pr(1-q)q}$$
$$= \frac{(1-p)^2 p}{2(1-p)^2(p+q)+12(1-q)^2 q+4pr(1-q)q}$$

Érdekes, hogy ez a képlet már a $p=q$ esetben sem adja ki a konstans $\frac{1}{16}$ értéket, hanem ezt:

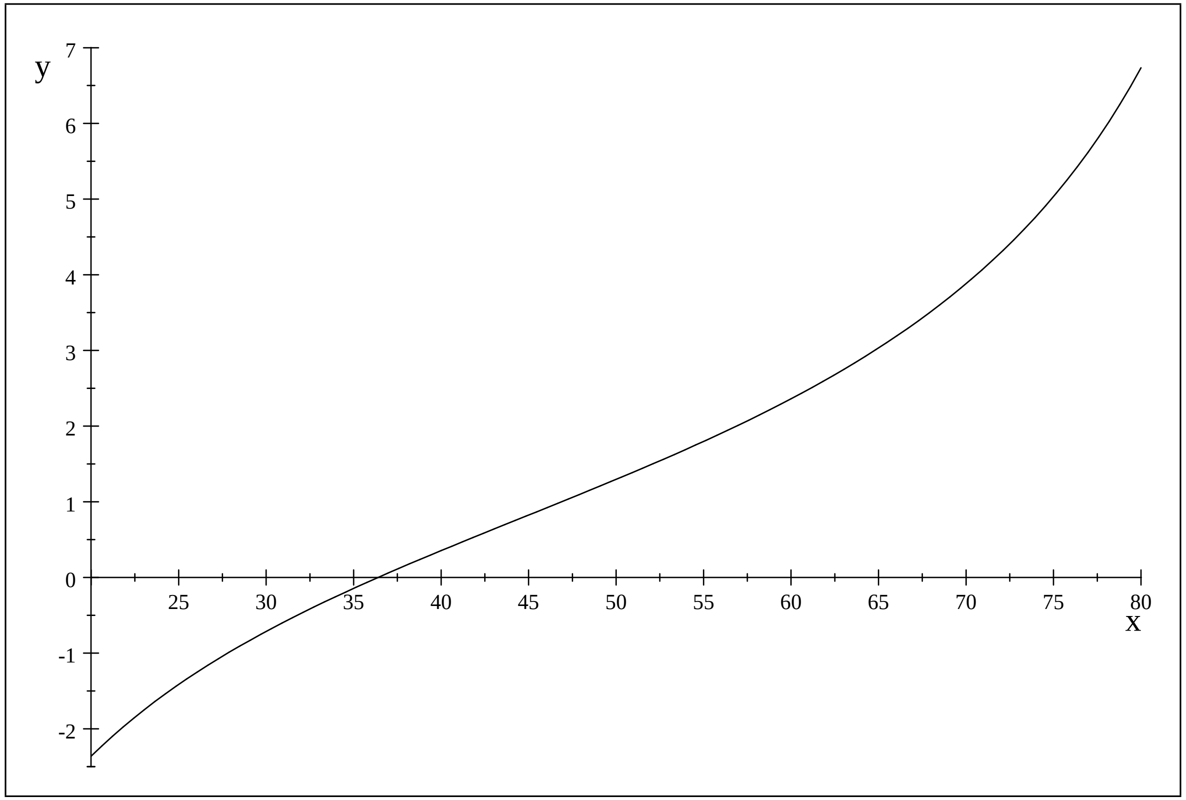
$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+\frac{pr}{4(1-p)}}$$

Tehát az orvosgenetikus ötlete ha nagyon kis mértékben is, de azt eredményezné, hogy a négylányos családok részaránya a négygyermekesek között az $\frac{1}{16}$ arány alá csökkenne, ha p és q nem térne el észrevehetően egymástól. A fent mintául választott $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{4}$ esetben a pontos képlet ez lenne:

$$
\begin{aligned}
& \frac{(1-\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2}}{2(1-\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}) + 12(1-\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{3}{4} + +4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r(1-\frac{3}{4}) \cdot \frac{3}{4}} \\
= \quad & \frac{2}{6r+19}
\end{aligned}
$$

Tehát a korábban számított $2/19$ arány egy kicsit visszamozdulna az eredeti $1/16$ felé, de rendkívül kicsi mértékben.

Összefoglalva: Dolgozatunk alapfeltevése, mely szerint $p < q$, azt is eredményezheti, hogy a négy lány esélye lényegesen megnövekszik. Természetesen, ha q csak egy-két százalékkal több, mint p, akkor a növekedés (vagy estleges csökkenés) nem túl jelentős. A következő grafikon azt mutatja, hogy ha $p = \frac{x}{100}$, $q = \frac{x+1}{100}$, $20 \leq x \leq 80$, akkor hány százalékkal növekszik a négy lány esélye az $\frac{1}{16}$-hoz, mint 100 százalékhoz képest:



y
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
x