Haladvány Kiadvány, 2016.03.17. http://www.math.bme.hu/~hujter/160317.pdf

Napier pálcikák és a rácsmódszer az általános iskolákban

Szalkai István, Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu

A zsebszámológépek, "csökkenő" tananyag és lustuló (?) diákok korában a számolási készségek és hajlandóságok természetesen rohamosan csökkennek. Éppen ezért gondolom úgy, hogy minden lehetőséget meg kell ragadnunk a tanulók "becserkészéséhez": talán cikkünk 2. fejezete hozhat egy kis lelkesedést a nebulóknak és barkácsolni vágyó (de csak íróasztal mellett ülő) apukájuknak.

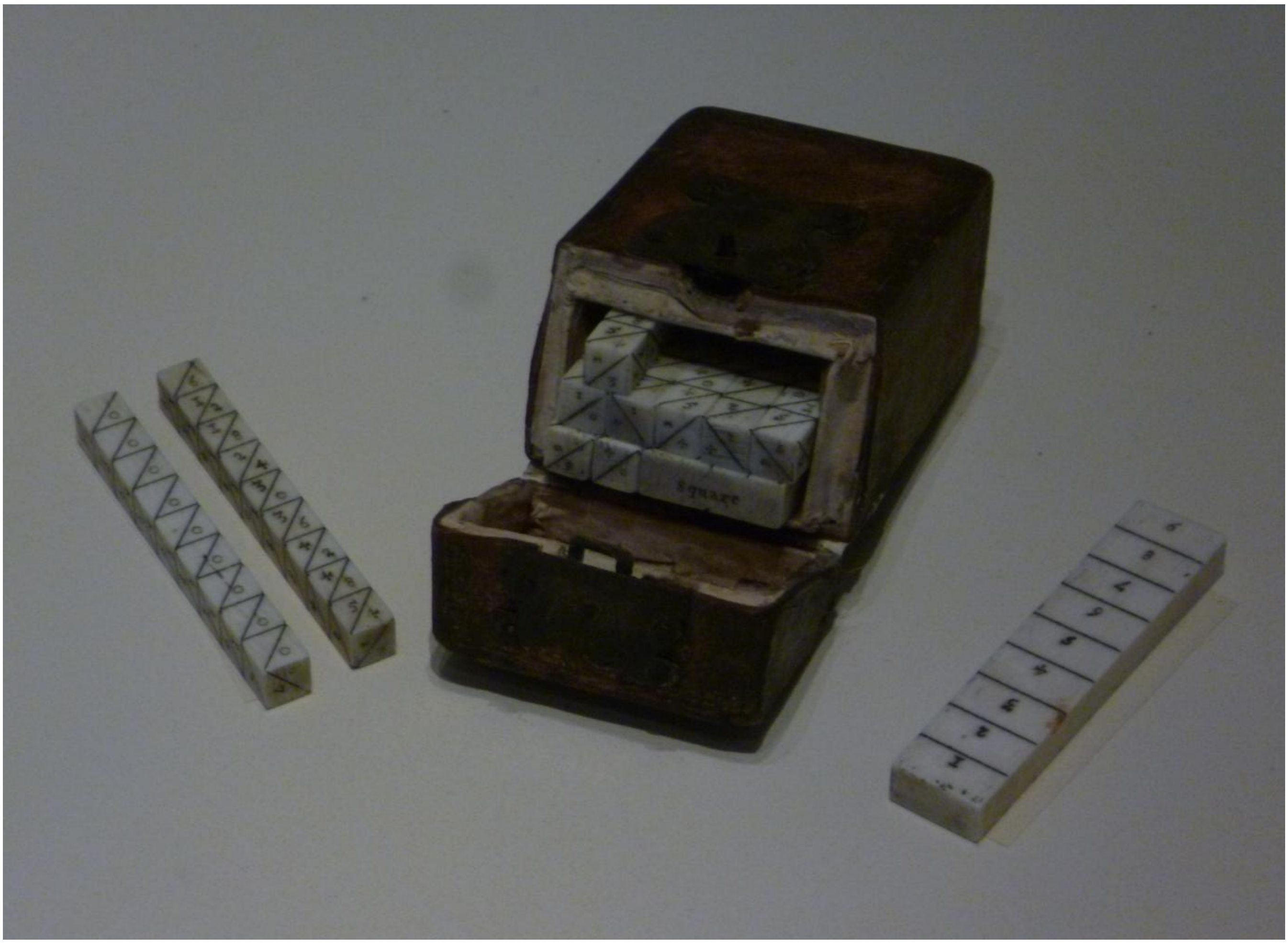
A cikkben leírt eszközök és módszerek sok helyen, elszórva megtalálhatók az interneten, de legtöbbször magyarázatok nélkül.

A nagyméretű képek eredeti méretben a forráshelyeken, vagy a

http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Napier/Napierkepek.zip

címen találhatók.

1. A pálcikák



1. ábra: Napier-pálcikák elefántcsontból, bőrtokban [1]

Forrás: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/73/Napier%27s_Bones.JPG

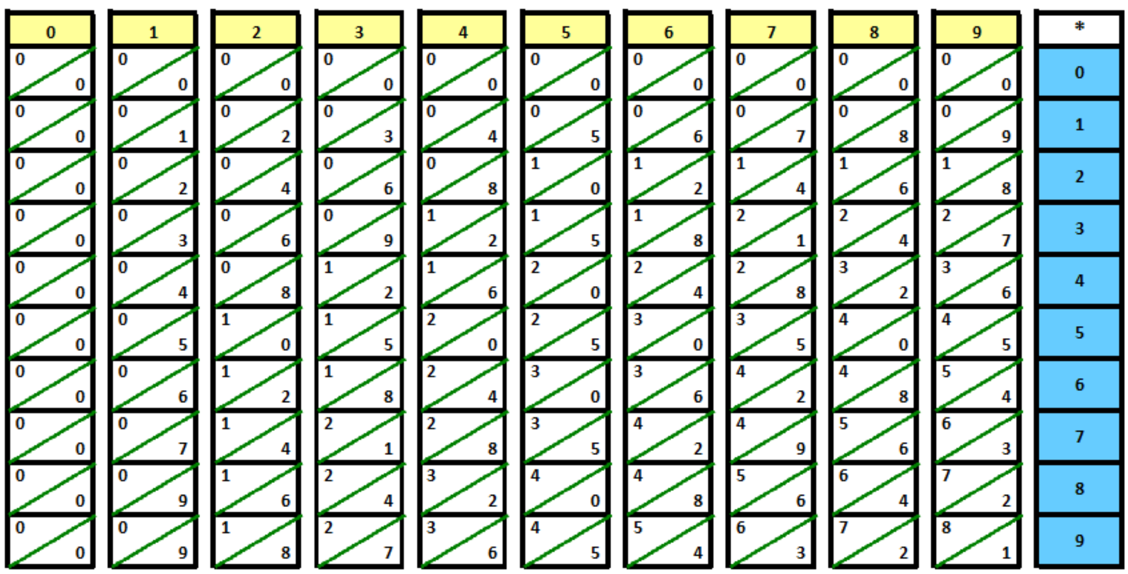
2. ábra: Napier-pálcikák fémtokban

Forrás: *Pap Gyula* https://picasaweb.google.com/109183040810047976567/200811Bonn#5269988323735400882

Angolul *bones* (csontok), hiszen a fenti képeken is jól láthatók a díszes bőr- és fémdobozban az értékes *elefántcsont* (!) rudacskák, a praktikus csomagolás alapján pedig felismerjük bennük a XVII.sz. tudósainak és mérnökeinek *zsebszámológépét*! **John Napier** (1550-1617) skót matematikus és természettudós **1614** körül írta le ezeket a számolási segédeszközöket. Érdekes, hogy körülbelül ugyanekkor tette közzé a logaritmusról szóló felfedezéseit is, amelyek pedig a korszerűbb *logarlécek* elméleti alapjai. Logarléceket ugyan már 1630 -tól használtak, de a rudacskákkal többjegyű számokkal és nagyobb pontossággal lehetett számolni, a logarlécek pontossága pedig legfeljebb 4 jegy (**[1]**, **[2]**, **[3]**). Emiatt volt még a XIX. század végén is nagy jelentősége *Genaille rudacskáinak* is, amit az 5. fejezetben nutatunk be.

Közelebbről megvizsgálva a pálcikákat láthatjuk, hogy *pontosan* az általános iskolai szorzótábla található a négyszögletes hasábok oldalain, "puska" -szerűen átalakítva a mindennapi számolások megkönnyítéséhez. Ez már önmagában indolkolttá tenné a pálcikák órai használatát! Persze jó, ha a tanulók (és mi is) fejből tudjuk a szorzótáblát, de első ismerkedéskor is "játszhatnak" vele a kisdiákok, sőt a tízes átvitelt is szemléltethetjük a pálcikákal. (A XVII.sz. mérnökeinek pedig nagyon megkönnyítette mindennapi feladatait, logarléc és elektronikus zsebszámológép híján!)

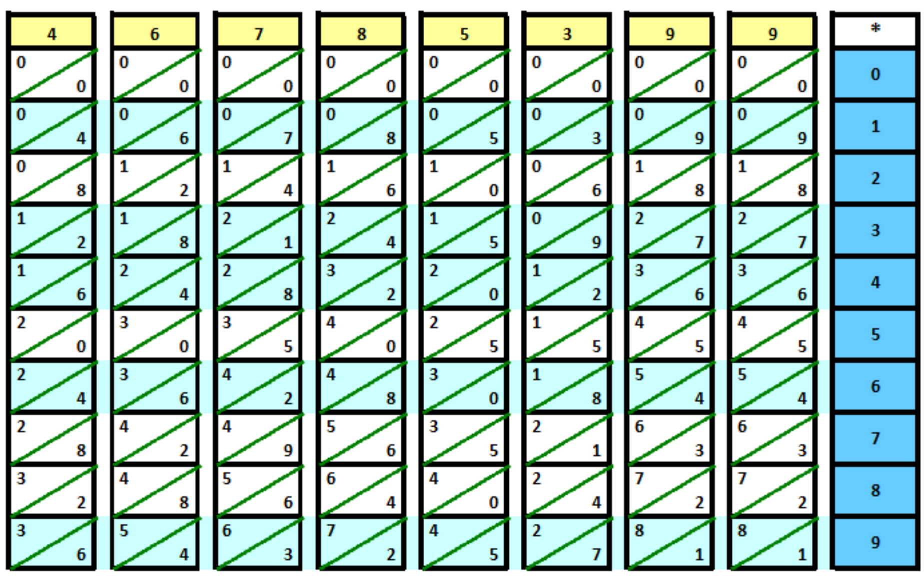
A pálcikák (négyzet alapú hasábok) oldalaira az alábbi ábrán látható papírcsíkok vannak ragasztva (bevésve), de iskolai használatra a hasábok feleslegesek. Elegendő csak rajz- vagy inkább vastagabb kartonlapra rajzolnunk (nyomtatnunk és ragasztanunk) az alábbi 11 -féle függőleges kis csíkot:



3. ábra: A Napier pálcikák feliratai

Igen, jól látjuk: a *szorzótábla* van függőlegesen csíkokra szabdalva, a tízes átvitelek a ferde átlók felett külön elválasztva. A **sárga** fejlécek miatt még azt sem felejtjük el, hogy melyik szám szorzatait látjuk ez egyes oszlopokban. A kék csík csak egy plusz "szamárvezető": a számoszlopok melyik sorában mennyivel is szoroztuk a sárga számot. Érdemes mindegyik csíkból több példányt készítenünk (a kék kivételével), mert ezek a csíkok nem csak emlékeztetőnek ("puska") jók.

Ha például a **46 785 399** számot kell megszoroznunk egy *egyjegyű* számmal, akkor csak egymás mellé teszünk sorban egy-egy **4, 6, 7, 8, 5, 3, 9** és **9** fejlécű papírcsíkot, melléjük a kék sorvezetőt, és vonalzónkat a sorvezető megfelelő sorához illesztve már diktálhatjuk is az eredményt, szokás szerint *jobbról balra*. A ferde vonalak felett (balra) a tízes maradékokat látjuk, tehát a legelső számjegy kivételével a tőle jobbra levő tízes maradékokat is a számhoz kell adnunk, az esetleg menet közben keletkező újabb maradékokkal együtt (mint ahogy eddig is tettük).

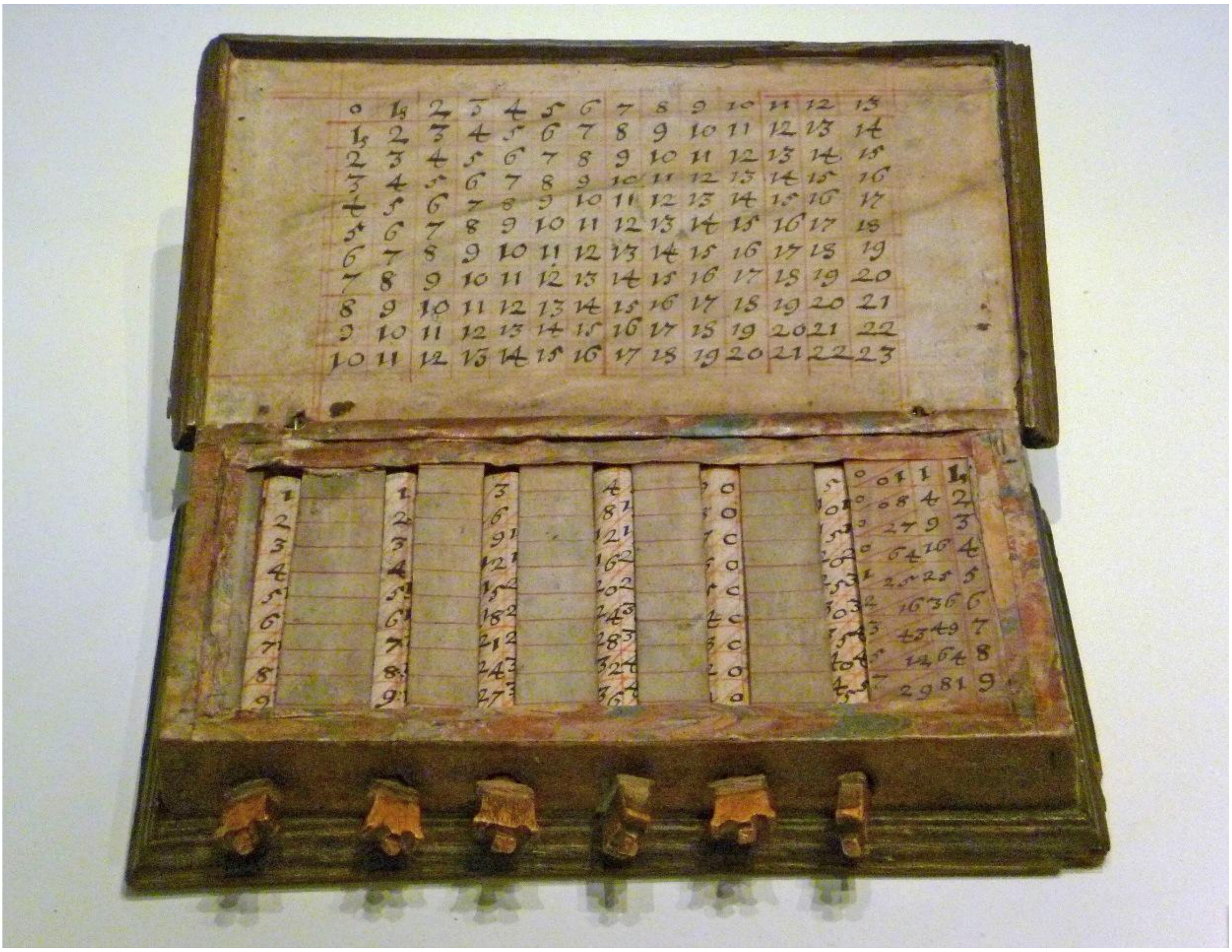


4. ábra: Nyolcjegyű szám szorzása egyjegyűvel

A pálcikák és a ferde vonalak igazi hasznát a 3. fejezetben ismerjük meg, előtte kicsit szórakozzunk.

2. Kis barkácsolás

Bár a kb. 10x10 db kartonpapír-szalag használata az asztalon és tárolása (összekeverése?) a fiókban egyszerűen megoldható, az alábbi "számológép" talán a mai fiúkat és apukákat is fellelkesíti, hiszen pár dugóból, hurkapálcikából és egy kartondobozból könnyen elkészíthető:



5. ábra: A Napier - "számológép"

Forrás: [2] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Napier%27s_calculating_tables.JPG

6. ábra: A Napier-számológép belülről

Forrás: [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/An_18th_century_set_of_Napier%27s_Bones.JPG

Vagyis nem kell sok szalag vagy pálcika, ráadásul mindegyikből több példány (és ezeket válogatni, helyezgetni). Mondjuk hat, fel nem vágott szorzótáblát henger alakúra hajtogatunk, végeiken 2-2 dugóval és hurkapálca-tengellyel a kartondobozhoz erősítve készen is vagyunk. A 6. ábrán a gép jobb oldalán láthatjuk. a kürtőskalács-sütő, vagy inkább egy szabadtéri grillsütő hengereihez hasonló alkotásunkat. (A dugók kerületét és a körbehajtogatott szorzótáblák szélességét ugye szinkronizálják, kedves Apukák, és az oszlopok sárga fejléceiről sem feledkeznek meg!)

Hogy kiemeljük a bennünket érdeklő oszlopokat, érdemes függőleges ablakokkal ellátott fedőlapot helyeznünk a gépre, hiszen a "kürtőskalács" hengereknek csak a megfelelő (legfelső) oszlopára vagyunk kíváncsi: a kérdéses (sárga) szám többszöröseire. A fedőlap jobb szélére a hiányzó **kék** "szamárvezetőt" is festhetjük, ekkor ismét a 4. ábrán látható elrendezést látjuk, a gombokat csak tekergetnünk és a számokat csak leolvasnunk kell!

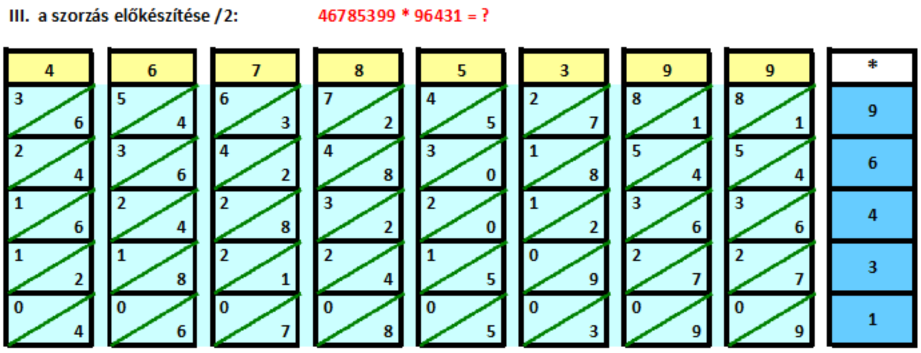
Az 5. ábrán látható "gép" fedőlapjának jobbján a **kék** "szamárvezető" helyett a négyzet- és köbszámokat láthatjuk, a dobozfedő belsejében pedig az összeadó táblázatot (újabb "puska").

A Napier-pálcikák (és a ferde vonalak) igazi előnyét azonban a **rácsmódszerben** ismerhetjük meg, ráadásul ezzel a módszerrel már többjegyű számokkal is könnyen szorozhatjuk kedvenc **46 785 399** számunkat!

3. A rácsmódszer

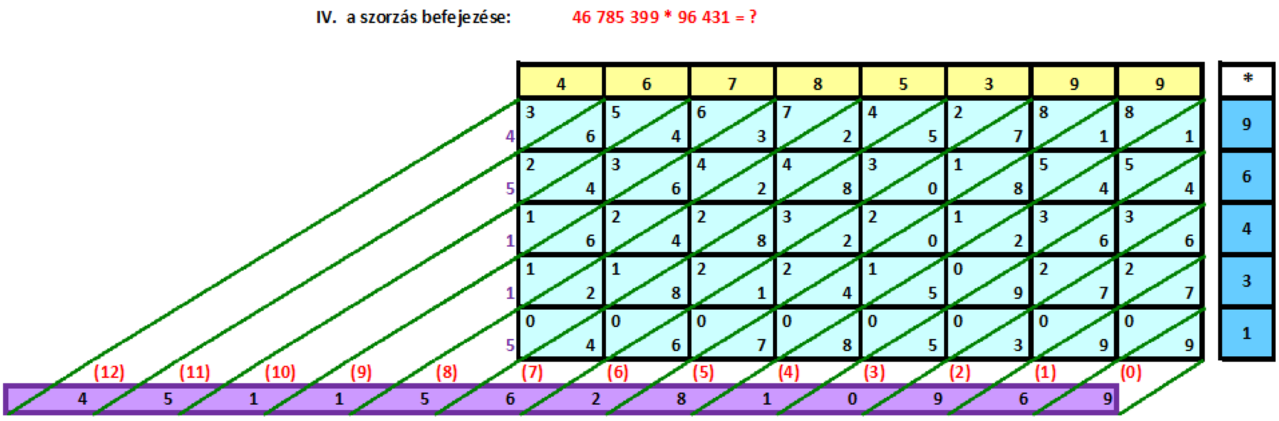
A **rácsmódszert** angolul *lattice multiplication* -nak, olaszul *gelosia*/*gelusia* módszernek hívják, de ismertek még a *Velencei négyzetek*, a *Hindu rács* és a *Shabakh* elnevezések is (ld. [4]).

Példaként lássuk a **46 785 399 x 96 431** (hű, de nagy!) szorzat kiszámolását!
Először tegyük magunk elé a 4.ábrán elhelyezett pálcikákat. Ebből a táblázatból a szorzó számjegyeinek megfelelő sorokat (legnagyobb helyiértéktől kezdve) másoljuk le egymás alá, amint az alábbi ábrán láthatjuk. Az oszlopok között nem kell hézagokat hagynunk.



7. ábra: A szorzás előkészítése

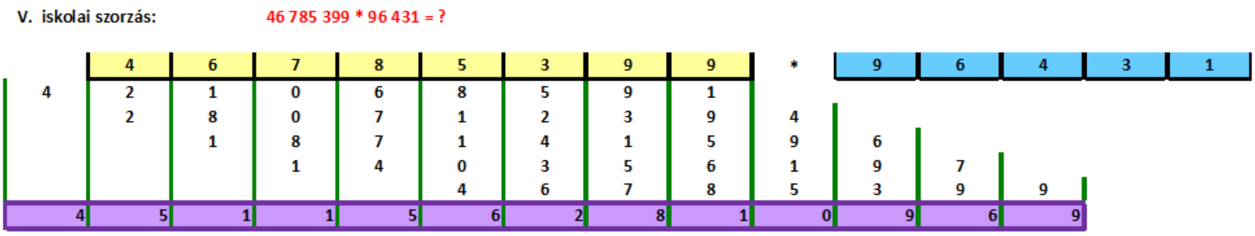
Ezután már csak a ferde (**zöld**) átlókban levő sok számot kell összeadnunk és a végeredményt a **lila** sorba írnunk. Természetesen az összeadásokat a jobboldali (egyelemű) átlóval kezdjük, és a tízes átviteleket is a (balra) következő átlóhoz adnunk. Az ábra bal alsó sarkában ezeket a részletszámításokat láthatjuk, a sorok végén levő piros számok a tízes átviteleket jelölik.



(0) 9 = **9**
(1) 7+0+9 = 1*10 + **6**
(2) 1+6+2+7+0+3 = 1*10 + **9**
(3) 1+4+3+6+2+9+0+5 = 3*10 + **0**
(4) 3+1+5+4+3+2+0+5+0+8 = 3*10 + **1**
(5) 3+8+1+5+8+1+0+1+4+0+7 = 3*10 + **8**
(6) 3+8+7+1+0+2+2+2+1+0+6 = 3*10 + **2**
(7) 3+2+5+3+8+3+8+2+8+0+4 = 4*10 + **6**
(8) 4+4+2+4+2+2+4+1+2+0 = 2*10 + **5**
(9) 2+7+3+4+6+2+6+1 = 3*10 + **1**
(10) 3+6+4+3+4+1 = 2*10 + **1**
(11) 2+5+6+2 = 1*10 + **5**
(12) 1+3 = **4**

8. ábra:A rácsmódszer - szorzás

Egyszerű másolgatós és összeadós módszer. Alaposabban szemügyre véve láthatjuk, hogy majdnem ugyanaz, mint ahogyan mi is az általános iskolában tanultuk. Csak mi az átlók helyett a sorokat egy-egy helyiértékkel eltolva, a számokat paralelogramma alakban írjuk le a papírra, és emellett a maradékokat állandóan a fejünkben kellett tartanunk és hozzáadnunk a következő számhoz:



9. ábra: Az iskolai szorzás

A rácsmódszer annyivel egyszerűbb, hogy különválasztja az "adatok" papírra írását és az összeadásokat, a tízes átvitellel együtt.

A rácsmódszerhez használt papír négyzetrácsa legalább 1x1 cm méretű négyzetekből kell, hogy álljon (világoszöld a 8. ábrán), hiszen két-két számjegyet kell beleírnunk (akár meghúzzuk az / átlót, akár nem). A gyakorlatban néha az átlókat nem hosszabbítják meg egészen a **lila** eredményvonalig, hanem az eredmény számjegyeit rögtön a táblázat alsó és bal széleihez írják, mint az ábrán mi is írtuk az 5,1,1,5,4 számjegyeket.

4. Schickard gépe

Wilhelm Schickard (1592-1635) német matematikus **1623**-ban Keplernek küld levélben terveket egy mechanikus számológépről **[5]**, **[6]**, **[7a]**, **[7b]**. A következő fényképen látható gép 1960-ban készült, működőképes rekonstruciója látható.

10. ábra: Schickard gépe

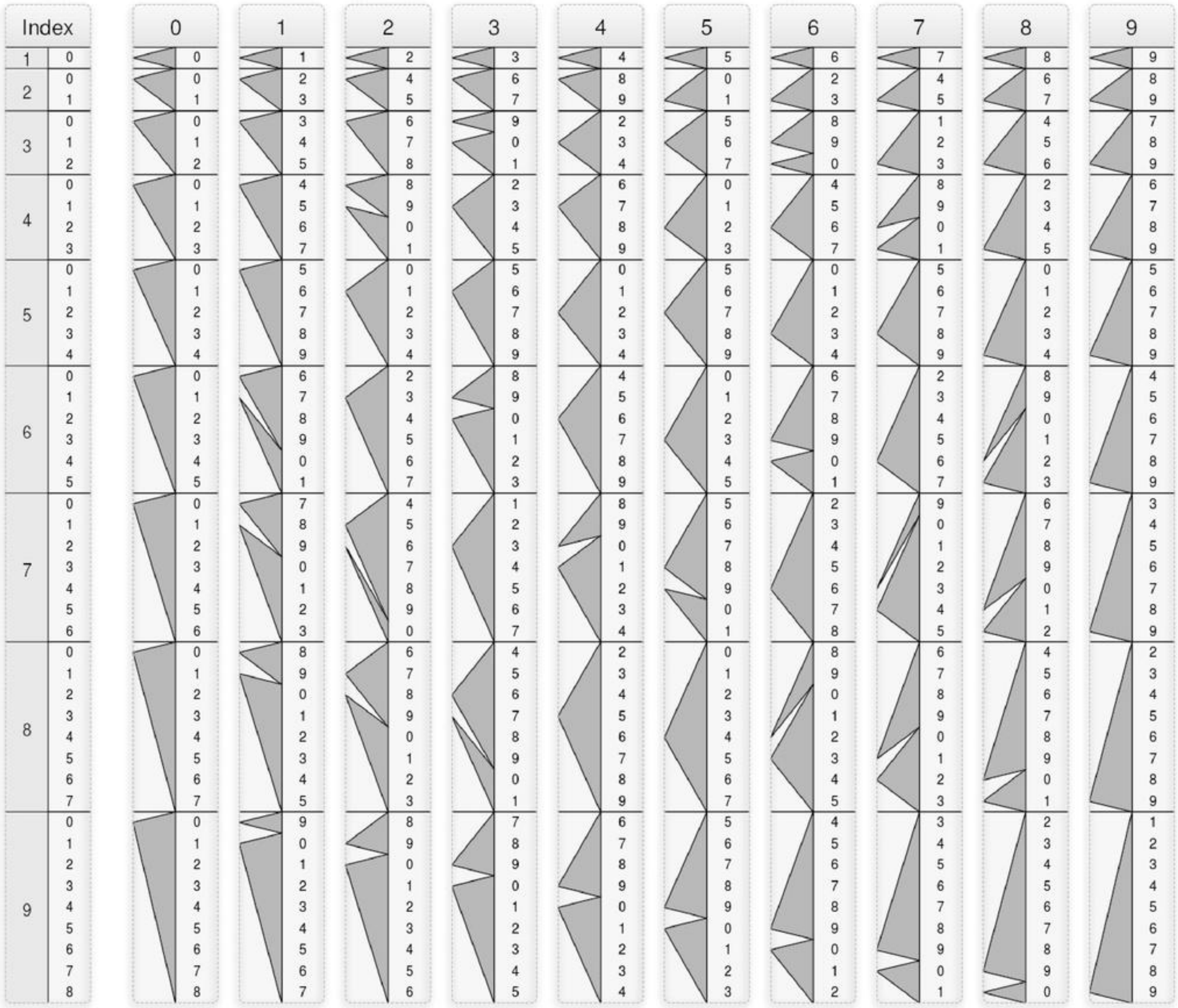
Forrás: [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard#/media/File:Schickardmaschine.jpg

A gép függőleges részében az általunk barkácsolt "kürtőskalács" hengerek vannak, az előttük vízszintesen elhúzható zsalukkal el- és kitakarhatjuk a megfelelő sorokat - éppen melyik számjeggyel szorozzuk a hengereken felül beállított számot. A szorzótáblán látható számokat és a ferde / átlókkal elválasztott tízes maradékokat az alul levő réz gombokkal kell tekergetve beállítanunk, és ezt a fogaskerekes számláló (mint az autók és a villanyóra számlálója) *összeadja* helyettünk. Ez utóbbi Schikard nagy találmánya, nem kell papír és összeadás fejünkben átlósan. Helyette azonban arra *nekünk kell* ügyelnünk, hogy a szorzandónak éppen melyik helyiértékén levő számjegyével szorzunk, mert ennek megfelelően a (függőleges) szorzótáblán látható adatokat és tízes maradékait a helyiértéknek megfelelően egy-egy helyiértékkel balra kell tolnunk! Itt sajnos már a ferde átlók nem segítenek, így véleményem szerint Schickard gépével nem egyszerűbb a számolás mint a rácsmódszerrel, hibalehetőség itt is van bőven. Schikard gépének működését részletesebben például az alábbi videóból ismerhetjük meg: **[8]**.

Érdekes még a szorzótábla (pontosabban a tízes átvitelek) következő grafikus változata is:

5. A Genaille-Lucas vonalzók

Első ránézésre ez egy különös szorzótábla ([9], nagy méretben a [10] címeken található):

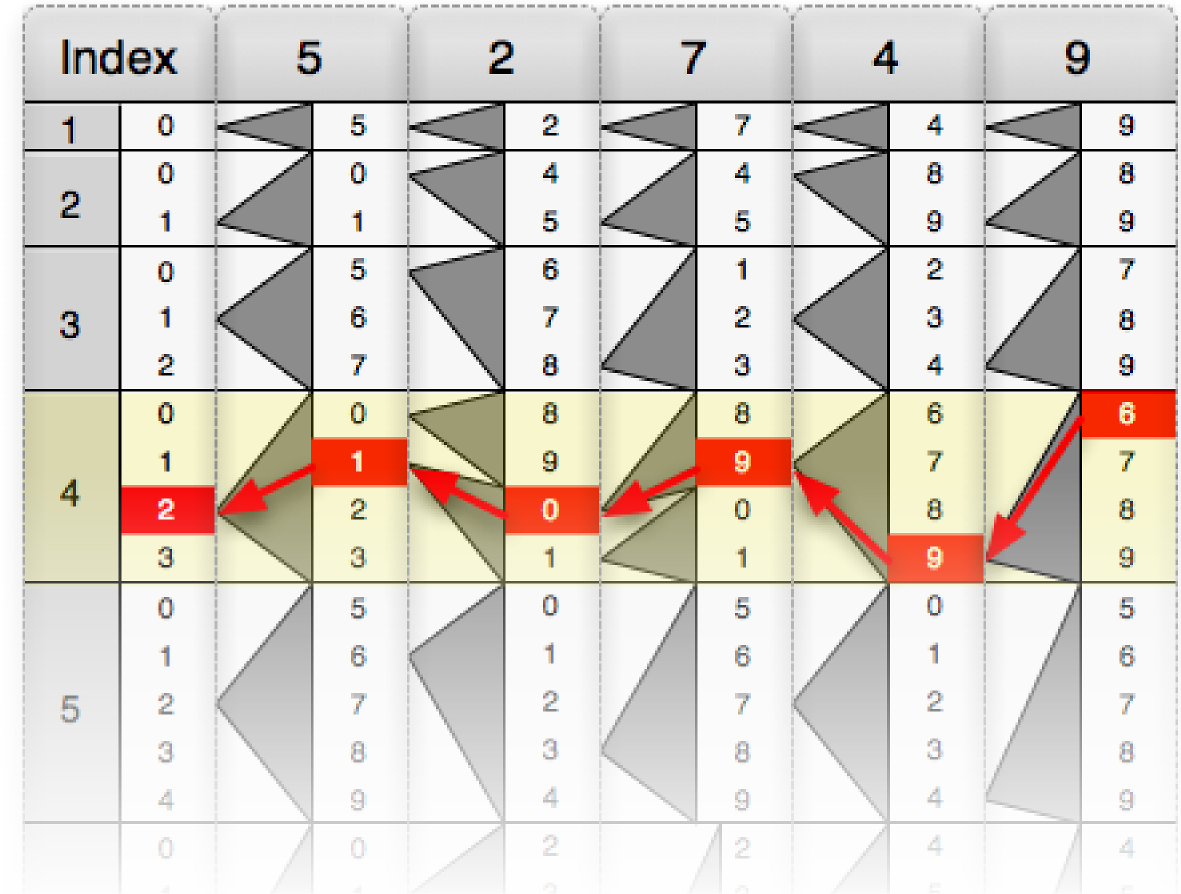


11. ábra: A Genaille-Lucas féle vonalzók

Forrás: [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers

Henri Genaille francia vasúti mérnök 1891-ben találta fel a Napier pálciák fenti változatát, (Genaille-*rudacskáknak* is nevezik), amikkel sikerült megoldania **Édouard Lucas** (1842-1891) francia matematikusnak egy 1885-ben felvetett aritmetikai problémáját is ([9], [12]).

A nagy ötlet az,hogy a maradékokat, vagyis a tízes átviteleket nem az / átlók felett (bal oldalon) találhatjuk egy-egy számjeggyel, hanem egy-egy *nyíl mutat* éppen a ,egfelelő egységgel lefelé, a következő (balra levő) rúdon éppen arra a számra mutatva, amennyi a maradéknak a következő számhoz adásakor lenne a végeredmény. Erre egy példát a 12. ábrán láthatunk (a **kék** "szamárvezetőt" **Index** felirattal a *bal oldalra* kell helyeznünk): mennyi **4 x 52 749 ?**



12. ábra: Szorzás a Genaille-Lucas féle vonalzókkal

Forrás: [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers
[11] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Genaille-Lucas_rulers_example_5.png

A halványsárga színezés azt mutatja, hogy a rudacskáknak a 4. sorban levő részét kell tekintenünk, a piros útvonalon pedig egyszerűen leolvassuk a végeredményt (jobbról balra): az eredeti (szürke) nyilak mentén a **6,9,9,0,1,2** számjegyeket vagyis a végeredmény **210 996**. Fejben nem kell számolnunk semmit, tehát a a szorzás gyorsabb és kevesebb hibát tartalmaz, mint a Napier pálcikákkal.

Ha egy egyjegyű számmal ilyen könnyen szorozhatunk akárhányjegyű számokat,akkor többjegyű számokkal is könnyen szorozhatjuk őket. Nem a 8. ábrán bemutatott rácsmódszert kell módosítanunk, hanem egyből "ugorhatunk" a 9. ábrára, a mai iskolai módszerre: a már egyszer felállított rudacskák megfelelő soraiból (a szürke nyilak mentén, jobbról balra haladva) csak másolnunk kell a 9. ábra egyes soraiba e részeredményeket, paralelogramma alakba. Igaz, az oszlopok összeadását (és ezek maradékainak továbbvitelét) még nekünk kell megtennünk, de mind a másolás, mind ez utóbbi összeadás sokkal ghyorsabb, mint a Napier-pálcikák 8.ábrán látható alkalmazása esetén.

A 11. ábra oszlopait (az Index nélkül) szintén henger alakúra hajtogathatva felragaszthatjuk dugókra, hurkapálca tengelyekkel az 5. és 6. ábrán látható "számológéphez" hasonló játékot készíthetünk.

A Genaille-rudacskák nagy népszerűségnek örvendtek a XIX. század végén, de a nemsokára elterjedt mechanikus (fogaskerekes) számológépek hamarosan kiszorították őket.

6. Irodalom

[1] http://hu.wikipedia.org/wiki/John_Napier_(matematikus)

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier

https://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Napier%27s_calculating_tables.JPG
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/An_18th_century_set_of_Napier%27s_Bones.JPG
https://en.wikipedia.org/wiki/Napier%27s_bones

[3] http://hu.wikipedia.org/wiki/Logarléc

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_multiplication

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard

https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard#/media/File:Schickardmaschine.jpg

[7] http://www.quickiwiki.com/hu/Wilhelm_Schickard

http://www.wikiwand.com/hu/Wilhelm_Schickard

[8] https://www.youtube.com/watch?v=N_uiwO8lT5c

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Genaille%E2%80%93Lucas_rulers

[10] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Genaille-Lucas_rulers_full.svg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Genaille-Lucas_rulers_full.pdf

[11] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Genaille-Lucas_rulers_example_5.png

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas