Haladvány Kiadvány 2016.04.06

# Mértani közép a japáni ökörszem nézőpontjából

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Ajánlás: *Fodor János* (1956–2016) emlékére.

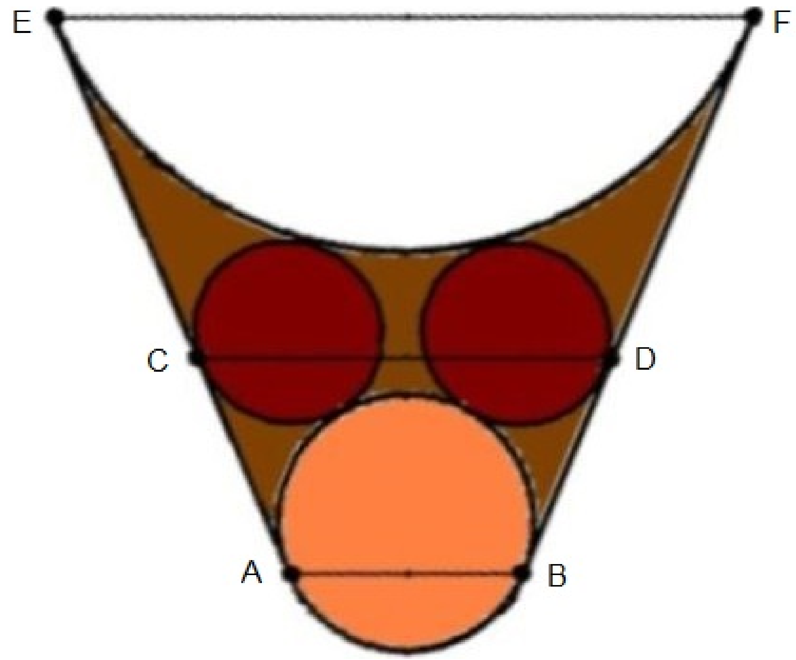
Köszönetnyilvánítás: Hálával tartozunk *Darvas György* és *Szabó Péter Gábor* kollégáknak, akik a japáni népi-vallási geometriára (sangaku, wasan) felhívták a figyelmünket.

A japáni ökörszem tudományos neve: *Troglodytes troglodytes fumigatus*. Hangja meghallgatható, röpte megtekinthető az interneten. De ebben a dolgozatban nem róla lesz szó, hanem egy geometria tételről, melyet a régi japán geometriai eredmények inspiráltak. A tétel egy olyan ábráról szól, melyen egy ökör fejét vélhetjük felfedezni, és az ökör két szemének két sarka közti távolságról van benne szó.

Tekintsük az első ábránkat, melyen egy szög belsejéből a szög mindkét szárát érinti mindkét nagy kör, a két kicsi kör pedig, a két nagy kört és a szögszárak közül az egyiket illetve a másikat. Az világos, hogy az ábrán az $AB$, $CD$ és $EF$ szakaszok párhuzatmosak.

**Tétel:** $CD^2 = AB \cdot EF$

Szavakkal megfogalmazva: Az ökör szemsarkainak távolsága mértani közepe a szarva hegyei távolságának és a szája szélességének.


E
F
C
D
A
B

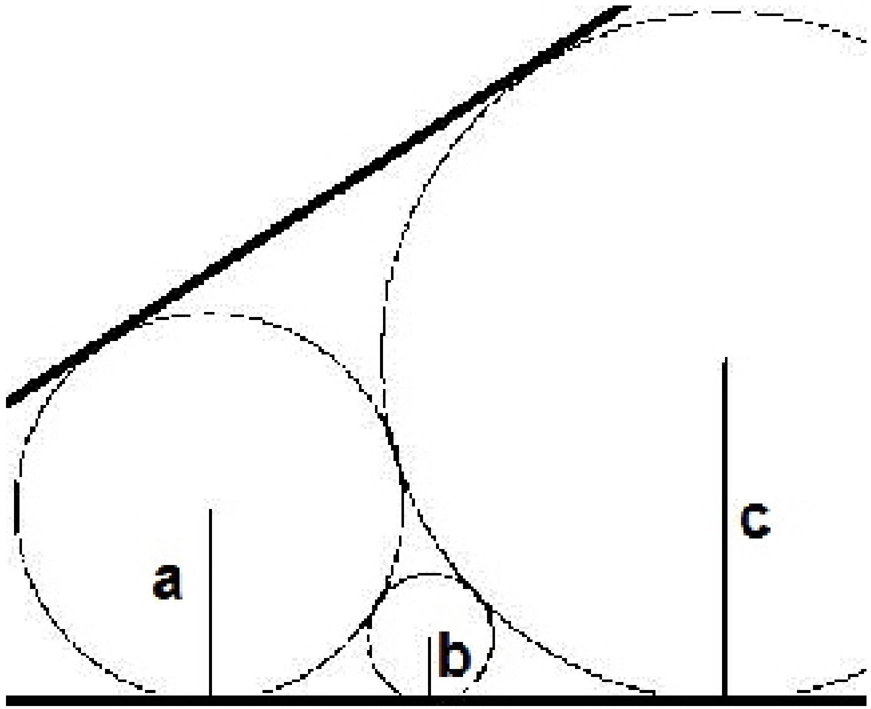
Japánból, a *Gumma prefektúra* idejéből, 1824-ből ismerjük a következő ábrára vonatkozó összefüggést:

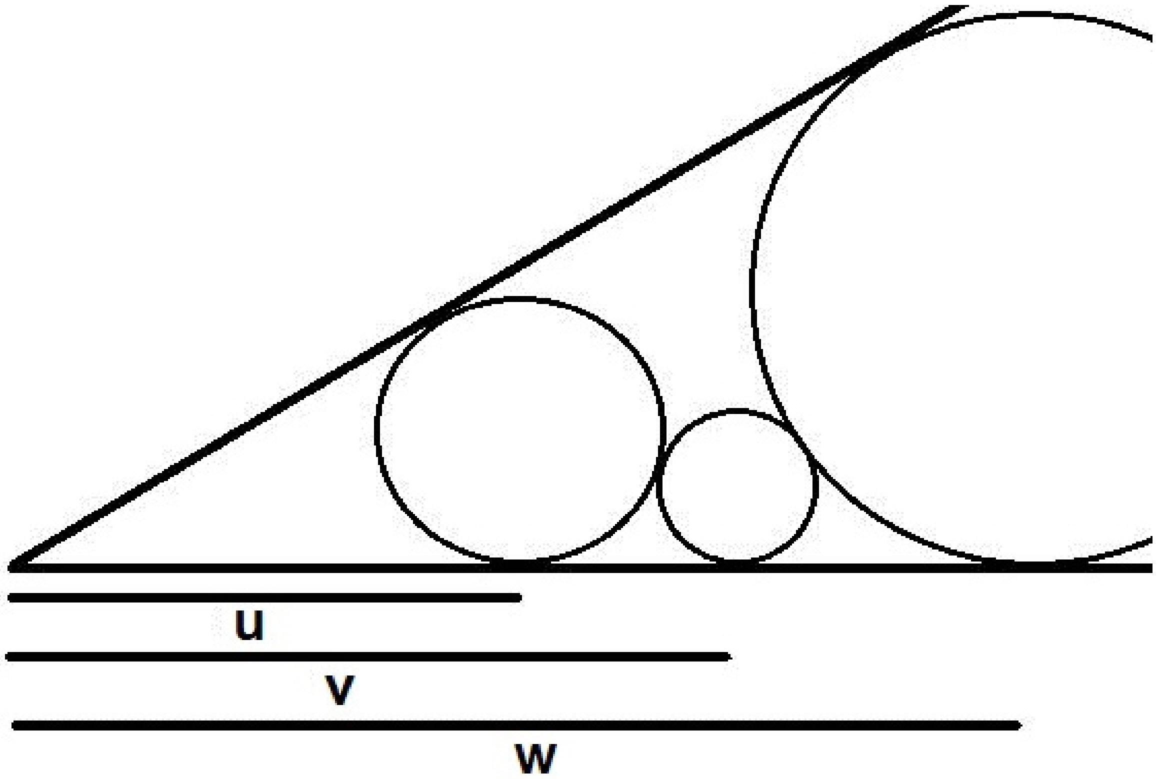
$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Erre emlékeztet a következő lemmánk, mely tulajdonképpen a japáni tétel általánosításaként is felfogható.

**Lemma:** A következő ábrán jelölje a körök érintési pontjainak távolságát a szög csúcsától $u, v, w$. Ekkor

$$v^2 = uw$$


a
b
c



u
v
w

Az teljesen világos, hogy a japáni ökörszem tétele következik a lemma állításából a párhuzamos szelők tétele alapján. Tehát már csak a lemma bizonyításával tartozunk.

**A lemma bizonyítása:** Az utolsó ábrán látható szög csúcsát az origóba helyezzük; az egyik szögszár az $x$-tengely, a két szélső kör középpontját összekötő egyenes egyenlete: $y = mx$, ahol $m$ egy pozitív konstans paraméter. A bal szélső kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + (y - mu)^2 = (mu)^2$$

Hasonlóképpen a jobb szélső kör egyenlete:

$$(x - w)^2 + (y - mw)^2 = (mw)^2$$

A középső kör sugarát jelölje $r$. A középpontjának és a bal szélső kör középpontjának távolsága nyilván

$$\sqrt{(v-u)^2+(mu-r)^2}=mu+r$$

Átrendezéssel ebből azt nyerjük, hogy

$$v^2=2uv-u^2+4mru$$

A másik oldalról indulva pedig azt kapjuk, hogy

$$v^2=2wv-w^2+4mrw$$

Tehát

$$2uv-u^2+4mru=2wv-w^2+4mrw$$

azaz

$$r=\frac{u-2v+w}{4m}$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{2uv - u^2 + 4mru}{2} + \frac{2wv - w^2 + 4mrw}{2} \\ &= \frac{2uv - u^2}{2} + 2mu \cdot \frac{u - 2v + w}{4m} \\ &\quad + \frac{2wv - w^2}{2} + 2mw \cdot \frac{u - 2v + w}{4m} \\ &= uw \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

## Hivatkozások

Szabó Péter Gábor: Szangaku, a japán matematika kincsei, *Szaku* 9 (2003) 8–9.
`www.sangaku.info/sangaku_hu.pdf`

Szabó Péter Gábor: Sangaku, matematikai fatáblák japán templomokban, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* (2001) 386–388.
`http://www.komal.hu/cikkek/sangaku/sangaku.h.shtml`

Wikipédia: Szangaku, 2016.
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Szangaku`

Wikipédia: Vaszan, 2016.
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Vaszan`

Element, David: A japáni ökörszem hangja és röpte.
https://www.youtube.com/watch?v=Ip3i3jBGVB8