Ácsok és földmérők háromszögei

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

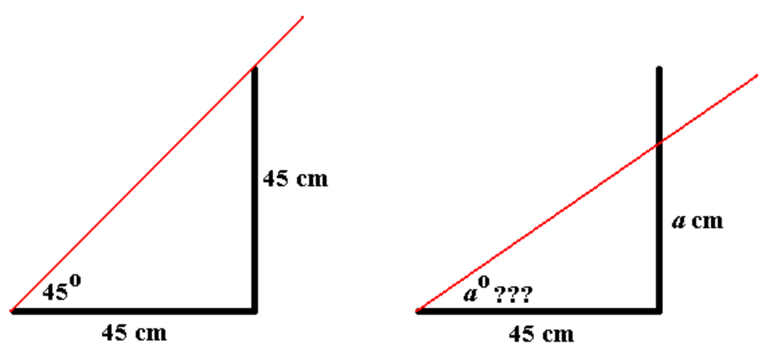
April 24, 2016

Haladvány Kiadvány, 2016.04.24., http://www.math.bme.hu/~hujter/160424.pdf

A gyakorlatban használatos több közelítő módszer, amelyek érdekessége a középiskolai geometria segítségével könnyen feltárható. Ízelítőül hármat nyújtunk át egy csorkorban az Olvasóknak.

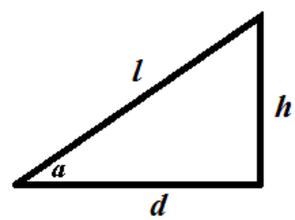
Az ácsok derékszögű háromszöge

Saját szememmel láttam,hogy ácsok még mindig használják a következő módszert (mértani) szögek kimérésére. Készítenek két 45 cm -es lécből egy derékszögű háromszöget (átfogója valamekkora), ennek hegyesszöge nyilván 45^o. Ha ezután egy α fokos szöget kell kimérniünk, akkor a ferde "átfogó" lécet csak lejjebb mozgatják úgy, hogy a szemközi befogó (függőleges léc) csak α cm legyen. Ekkor (állításuk szerint) a megváltoztatott hosszúságú léccel szemközti szög körülbelül α fok lesz:



Számítsuk ki az így kapott tényleges szögeket mondjuk $a = 20$cm, ... , $a = 60$cm esetén. (Megoldás a cikk végén található.)

A földmérők derékszögű háromszöge



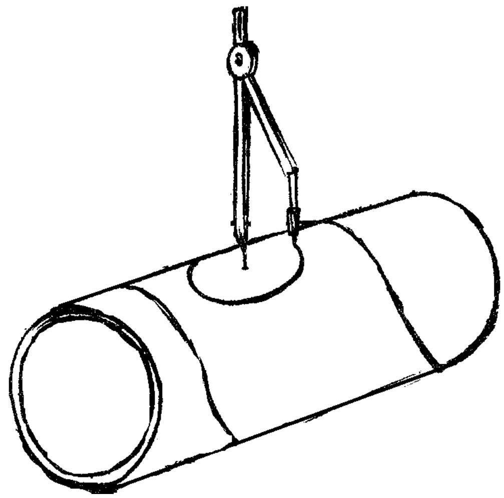
Harmat István kollégámtól hallottam a következő módszert, állítólag földmérők használják a következő közelítést. A lejtő (domboldal) hossza l , emelkedése (magassága) h esetén a (térképi) vetület d közelítő kiszámolása:

$$d \approx d' := l - \Delta l \quad ahol \quad \Delta l := \frac{h^2}{2l} \ .$$

Természetesen ez a közelítés még a zsebszámológépek elterjedése előtt volt hasznos, amikor még az általános logarléc sem volt feltalálva (lásd [1],[2]). Cikkünk végén kiszámoljuk az *abszolút-* és a *relatív-* hibákat: meglepő eredményeket kapunk!

Egyéb "szerkesztések"

Mielőtt elmerülnénk a fenti problémák számolgatásában,próbáljuk ki a közismert "*ellipszis a palackon*" rajzolást, melyet már **Gárdonyi Géza** [3] könyvében is megtalálhatunk, de falun is jól ismert módszer. Tekerjünk egy hengerre (pl. borosüveg) papírlapot és a papírlapra így rajzoljunk egy *körzővel* "kört" :



Hiába mozgatjuk gondosan a körzőt: rajzunk "matematikai" okok miatt nem lesz ellipszis, a részletes számolás [4] -ben megtalálható.

Megoldás: az ácsok háromszöge

A valódi szög α = arctg(α cm/45 cm), tehát

α=20 cm => szög = arctg(20/45)= $23,96^o = 23^o$ 58" ,

α=30 cm => szög = arctg(30/45)= $33,69^o = 33^o$ 41" ,

α=40 cm => szög = arctg(40/45)= $41,63^o = 41^o$ 38" ,

α=50 cm => szög = arctg(50/45)= $48,01^o = 48^o$ 01" ,

α=60 cm => szög = arctg(60/45)= $53,13^o = 53^o$ 08" .

Ellenőrizhető, hogy az *abszolút hiba* a 60^o kivételével $\pm 4^o$, a *relatív* hiba pedig (sorrendben): $19,8\%$, $12,3\%$, 4% , 4% és $11,5\%$.

Bár a szemlélődő járókelő ezt nemigen veszi észre, de ez építésvezető és a tető ennyi tévedést elbír-e, nem tudom.

Megoldás: a földmérők háromszöge

Abszolút hiba:

$$(d')^2 = \left(l - \frac{h^2}{2l}\right)^2 = l^2 - h^2 + \frac{h^4}{4l^2} = d^2 + \frac{h^4}{4l^2} \ ,$$

tehát az abszolút hiba $d^2 \, (= l^2 - h^2)$ -re: $\dfrac{h^4}{4l^2}$.

A relatív hiba meghatározásához írjuk h-t $h := l \cdot x$ alakban, hiszen a feladat háromszögek nagyítására érzéketlen (persze $x = \dfrac{h}{l} = \sin(\alpha)$). Ekkor

$$\Delta l = \frac{h^2}{2l} = \frac{l^2 x^2}{2l} = \frac{l x^2}{2}$$

és így

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{l^2 - h^2} = l \cdot \sqrt{1 - x^2} \quad (= l \cdot \cos(a)) \, , \\ d' &= l - \Delta l = l - \frac{l x^2}{2} = l \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

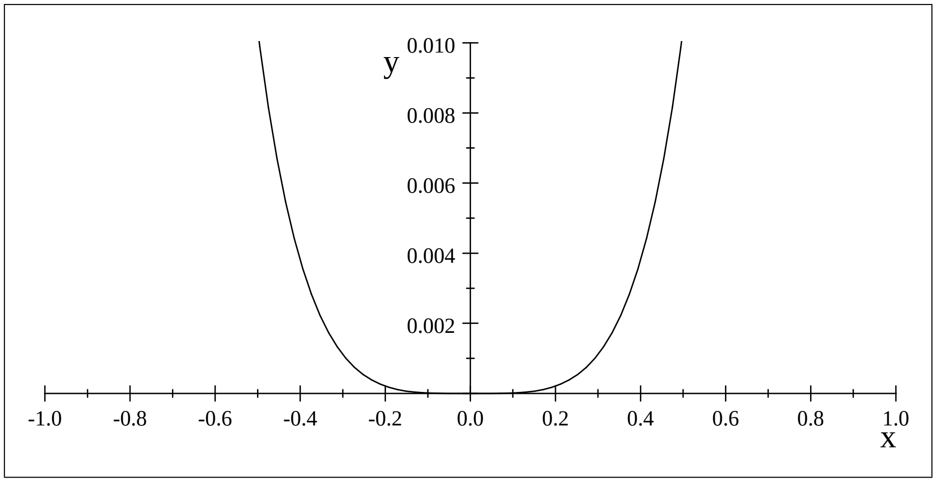
tehát az *abszolút hiba*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abs} &= d - d' = l \cdot \left(\sqrt{1 - x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right) \\ &= l \cdot \left(\cos(a) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Kis szögekre $\alpha \approx \tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) = x$ és $1 - \dfrac{x^2}{2}$ a $\cos(\alpha)$ <u>harmadrendű</u> (!) Taylor közelítése, ezért ε_{abs} kicsi.

A *relatív hiba* tehát

$$\varepsilon_{rel} = \left| \frac{d - d'}{d} \right| = \left| 1 - \frac{1 - \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1 - x^2}} \right|$$



ε_{rel}

Az alábbi táblázatban részletesen ki is számoltuk a relatív hibát:

α (^{o})	0^o	5^o	10^o	15^o	20^o	25^o	30^o	35^o
$x = \sin(\alpha)$	0	0.087	0.173	0.259	0.342	0.422	0.500	0.574
ε_{rel}	0	7×10^{-6}	1×10^{-4}	6×10^{-4}	0.002	0.005	0.010	0.020

α (^{o})	40^o	45^o	50^o	55^o	60^o	65^o	70^o	75^o	80^o
$x = \sin(\alpha)$	0.643	0.707	0.766	0.819	0.866	0.906	0.940	0.966	0.996
ε_{rel}	0.036	0.061	0.090	0.158	0.250	0.394	0.634	1.061	4.780

Láthatjuk, hogy a relatív hiba 30^o-ig elhanyagolható (max 1%), még 50^o-ig is 10% alatt van, ami nagyon jó eredmény. Azonban 55^o-tól felfelé a hiba már rohamosan megnövekszik, 65^o felett már több, mint 40% !

Javasolt irodalom

[1] **Szalkai István:** *Mit tudhat egy számolóléc?*, KöMaL 54 (1977), 146-151.
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szalkai-1977-KoMaL.pdf ,
http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704146.g4.png ...
http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704151.g4.png

[2] https://hu.wikipedia.org/wiki/Logarléc

[3] **Gárdonyi Géza:** *Nagyapó tréfái*, Tóth Kiadó, Debrecen, 2000.

[4] **Nick Lord:** *When is an oval not an ellipse*? The Mathematical Gazette, Vol. 86. No. 505 (March 2002), pp. 92-94.

[5] **Miholcsa Gyula:** *Labirintus*, Appendix Kiadó, Marosvásárhely, 2001.