Asztalosok és paralelogrammák

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

March 23, 2017

Haladvány Kiadvány, 2016.11.21.,
http://www.math.bme.hu/~hujter/161121.pdf

Keretek

Minden téglalap alakú keret (ablak-, ajtó-, szúnyogháló- stb.) két-két azonos hosszú (a és b) lécből áll. Egyenlő hosszú léceket könnyű kimérni és levágni, összeszegelés után máris van egy *paralelogrammánk*. De hogyan lesz ez a keret *téglalap*? Ha a keret nagy méretű, akkor a derékszögű vonalzónk eltörpül mellette. Közismert, hogy a téglalap feltétele az *átlók* (e és f) egyenlősége, átlókat mérni pedig sokkal pontosabban lehet.

No, de mit csinál egy asztalos, ha a két átló nem egyezik? Barátom elmesélte: egy lécet illesztenek a két átlóhoz és megjelölik (vagyis közös kezdőpontból felmérik a két átlót) és a két jelölés között "félúton" lesz a téglalap valódi átlója (c). Ezt már régóta így csinálják, és nagyon jó módszer! Vagyis $c = \frac{e+f}{2}$ számtani közép - a gyakorlatban.

Mit mutatnak azonban a pontos számítások? Alkalmazzuk a koszinusztételt az átlók metszéspontja által meghatározott negyed-paralelogramma háromszögekre:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(\gamma)$$

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\left(180^o - \gamma\right)$$

$$=> \quad c^2 = a^2 + b^2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + f^2}{2}$$

$$=> \quad c = \sqrt{\frac{e^2 + f^2}{2}}$$

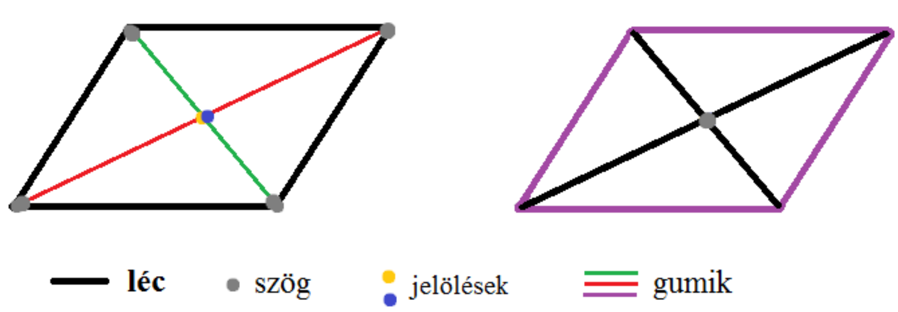
vagyis a *téglalap* átlója a paralelogramma két átlójának *négyzetes* közepe, ami mindig **nagyobb**, mint a számtani közép!

Szemléltető eszközök

Általános- és középiskolások legtöbbször csak "magolják" a paralelogramma (sok) alaptulajdonságát, ekvivalens definícióit. Számukra nagyon egyszerű és hasznos szemléltető eszközöket készíthetünk.

Két-két azonos hosszú pici (kb. $a \approx 10cm$, $b \approx 17cm$) lécdarabot négy szöggel összeütünk úgy, hogy "csuklósan" mozoghassanak[1]. Már ezen a "szerkezeten" tanulmányozhatják a tanulók: az oldalak mindig párhuzamosak.

Ha még a szemközti szögpárokra egy-egy (nem túl erős, de feszes) gumiszálat erősítünk, és e gumik felezőpontjait (eltérő színnel) megjelöljük, akkor már az is látható, hogy az átlók mindig felezik egymást. Ezt a "szerkezetet" láthatjuk a baloldali ábrán.



[1] Pontosabban: a *szögek közötti* távolságoknak kell egyenlőnek, a és b hosszúnak lenni.

A következő "eszköz" a fentiek megfordítását szemlélteti. Ehhez csak két lécre (e és f) van szükségünk, melyeket felezőpontjuknál erősítünk össze egyetlen szöggel, és a kerületre feszítünk ki egyetlen gumigyűrűt, amint a jobboldali ábrán láthatunk[2)]. A léceket forgatva ismét mindig paralelogrammákat látunk.

Barátom 12 éves fia pillanatok alatt el is készítette a fenti kis játékokat a műhelyben, de fényképem sajnos nincs róluk, mert készül a témazáró dolgozatra, és mindennap használja őket!

Az Érdeklődőknek ajánljuk a Haladvány Kiadvány többi írását is, például [1], [2].

Hibaszámítás

Ha csak pár fokos az eltérésünk a 90^o -tól, vagy csak egyszerűen az átlók legfeljebb körülbelül $p\%$ -kal térnek el c -től, vagyis mondjuk

$$e = y_1 \cdot c \quad \textit{és} \quad f = y_2 \cdot c$$

ahol

$$1 - \varepsilon < y_1, y_2 < 1 + \varepsilon$$

és $\varepsilon = \frac{p}{100}$, akkor a számtani és a mértani közép közötti eltérés:

$$\sqrt{\frac{e^2 + f^2}{2}} - \frac{e + f}{2} = \sqrt{\frac{(y_1 \cdot c)^2 + (y_2 \cdot c)^2}{2}} - \frac{y_1 \cdot c + y_2 \cdot c}{2} =$$

$$= c \cdot \left(\sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2}} - \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \leq c \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = E \ . \qquad (1)$$

Mivel az $\sqrt{1+x}$ függvény *Taylor sora*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + O\left(x^5\right) \ ,$$

ezért (1) így írható:

$$E = c \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 - \frac{5}{128} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 + O\left(\varepsilon^5\right) \right) \ ,$$

[2)] Hasznos a lécek végein kis "hornyokat" faragnunk és a gumigyűrűt ezekbe illeszteni, mert enélkül a gumi könnyen leeshet.

vagyis a *relatív hiba* legfeljebb $\frac{3}{4}\varepsilon$!

Hivatkozások

[1] **Szalkai, I.:** *Ácsok és földmérők háromszögei*, Haladvány Kiadvány, 2016.04.24.,
http://www.math.bme.hu/~hujter/160424.pdf .

[2] **Szalkai, I.:** *Mindennapi hatványösszegeink*, Haladvány Kiadvány, 2017.02.01.,
http://math.bme.hu/~hujter/170201.pdf