Haladvány Kiadvány 16.11.25

Matskó és a vízikerék meséje, avagy ne deriváljunk, inkább faktorizáljunk!

Hujter Mihály

Mottó: Matskóra számíthatunk, mert jól számolt

Kettőszázkilencvenöt éve született, 220 éve halt meg *Matskó János Mátyás*, korának jelentős magyar matematikusa. Egyik számítása a vízimalom kerekének energiahasznosítási hatásfokára vonatkozik. Milyen (kerületi) sebességgel kell egy vízi keréknek forognia a szabadon áramló illetve szabadesésben lezúduló víz sebességéhez képest, hogy a kerék a legnagyobb teljesítményt adhassa le? A maximális hatásfok elérésére a víz sebességének egyharmadára javasolt kerületi sebességnél maximálisan a vízienergia $4/27$ részének hasznosítása válik lehetővé.

Matskó János Mátyás életéről, munkásságáról a *História Tudósnaptár* és más internetes lexikonok név szerint megtalálható szócikkeiben olvashatunk. Megtudhatjuk, hogy Matskó differenciálszámítás révén jutott az eredményéhez. Itt mi most — nem ismerve Matskó eredeti számításainak részleteit — differenciálszámítás nélkül is igazoljuk Matskó eredményét. A lényeg az, hogy egy konkrét harmadfokú polinom lokális maximumhelyét deriválás nélkül úgy is meg lehet határozni, hogy megkeressük egy másik harmadfokú három valós gyökét (feltéve, hogy léteznek), aztán szorzattá bontjuk a második harmadfokú polinomot, majd a tényezőket diszkutáljuk.

Középiskolában a fizikaórán megtanultuk, hogy egységnyi tömegű, v sebességgel lezúduló víz mozgási energiája v^2-tel arányos. Mivel egységnyi magasságkülönbséget a lezúduló víznek v-vel arányos mennyisége tölt ki, ezért ha v sebességgel zúdul a víz a vízimalom kerekére, akkor a lezúduló elméleti teljesítménye arányos v^3-bel. A lezúduló víz a v sebességét úgy érte el, hogy v^2-tel arányos magasságból zúdult le. (Emlékszünk a fizikaórán tanultakra, hogy a leejtett kő az első másodpercben körülbelül 5 métert esik, a másodikban 15 métert, a harmadikban 25 métert, és így tovább. Precízebben fogalmazva: ha t ideig esik, akkot gt lesz a végsebessége, és $gt^2/2$ magasságból esett le, tehát a magasság arányos $(gt)^2$-tel, hiszen g konstans.)

Ha terhelés nélkül hagyjuk a vízikereket forogni, akkor kerületi sebességben átveszi a lezúduló víz sebességét. De ekkor nulla teljesítvényt tudunk kinyerni. Ha megterheljük a kereket úgy, hogy v helyett csak $v_1 < v$ legyen a kerületi sebessége, akkor a lezúduló víz eredeti v sebességéből megmarad v_1 sebesség, de a vízikerék lapátjához érkező sebesség csak $v - v_1$. Tehát a vízikerék csak $(v-v_1)^2/v^2$ arányú részét tudja átvenni a mozgási energiának, de a v-nél kisebb kerületi sebesség miatt ezt mozgási energiát v_1/v arányban kisebb teljesítményre tudja fordítani. Tehát a hatásfok:

$$\frac{(v-v_1)^2}{v^2} \cdot \frac{v_1}{v}$$

Bevezetve az $x = v_1/v$ jelölést, a fenti hatásfok így írható:

$$\frac{(v-xv)^2}{v^2} \cdot \frac{xv}{v} = x^3 - 2x^2 + x$$

Ennek a függvénynek a maximumhelyét keressük tehát $0 < x < 1$ feltétellel. Mármost a

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

polinom esetében

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{3}\right) - p(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - x^3 + 2x^2 - x \\ &= -x^3 + 2x^2 - x + \frac{4}{27} = \left(\frac{4}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right)^2 \end{aligned}$$

Mindazonáltal világos, hogy $0 < x < 1$ esetén $\frac{4}{3} - x$ pozitív, és $\left(\frac{1}{3} - x\right)^2$ nemnegatív. Megkaptuk tehát, hogy $p(x)$ maximuma a $0 < x < 1$ feltétel teljesülése esetén $x = \frac{1}{3}$-nél van, és az optimális hatásfok:

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

Hivatkozások

História Tudósnaptár / Matskó :
http://tudosnaptar.kfki.hu/historia

Esperanta Vikipedio / Matskó :
https://eo.wikipedia.org/wiki

Kislexikon / Matskó:
http://www.kislexikon.hu/matsko.html

Zemplén Jolán: A felvidéki fizika története 1850-ig.
http://mek.oszk.hu/05400/05460