

Haladvány Kiadvány 2016.12.10

## Két boríték paradoxona három értelmezésben

Hujter Mihály

[hujter.misi@gmail.com](mailto:hujter.misi@gmail.com)

.

Egy tévécsatornára kapcsolva éppen egy vetélkedő végét látjuk. A műsorvezető átnyújtja a nyereményt a győztesnek. Mutat felé két azonosnak látszó tömött borítékot, hogy válasszon közülök. A győztes választ egyet, és kivesz egy köteg

tízezrest. A műsorvezető bejelenti, hogy a másik borítékban ugyanannyi darab ötezres van, vagy pedig ugyanannyi darab húszezres. Az izgalom fokozása érdekében felajánlja a győztesnek, hogy nem akarja-e kicserélni a két borítékot. Veszíthet is vele, nyerhet is vele!

A győztes — aki okosságát a vetélkedő sok fordulójában már bizonyította — elkezd tépelődni. Közelről mutatja a kamera, milyen erősen gondolkodik. Aztán határozott arckifejezést vesz fel a győztes, és bejelenteni kezdi a döntését.

És ekkor hirtelen reklám következik a tévécsatornán. A reklámok mindig legalább 10 percig tartanak. Itt ebben az írásban mi azt fogjuk elemezni, vajon mi volt az okos győztes okos döntése.

**Első változat:** Mivel a két boríték teljesen egyformának látszott, ugyanakkora esélye volt mindegyik borítéknak, hogy több pénz legyen benne, mint a másikban. Ha mondjuk 80 ezer forint van a választott borítékban, akkor 50 százalék eséllyel 40 ezer forint veszteséget eredményez a csere a mostani helyzethez képest, és 50 százalék eséllyel 80 ezer forint további nyereményt. Ha fej vagy írás alapon játszana 40 ezer forinttal dupla vagy semmit a versenyző, akkor csak 40 ezer forintot nyerhetne, nem 80 ezer forintot. Tehát mindenképpen érdemes cserélni, hiszen ez nagy átlagban 25 százaléknyi többletnyereményt jelent az eredetileg választott boríték tartalmához képest.

**Második változat:** Mivel semmi információt nem kapott a versenyző arról, hogy melyik borítékban van több értékű pénz, ezért teljesen fölösleges cserélni. Az

már előre el van döntve, hogy mennyi pénz van a két borítékban együtt. Ha a kiválasztott borítékban például 80 ezer forint található, akkor előre eldöntött tény volt, hogy vagy 120 ezer forint volt a két borítékban összesen, vagy 240 ezer forint. Akármennyi is ez az összeg, nem függ a versenyző viselkedésétől. A változtatással tehát az eredeti  $X$  összeg harmadát veszítheti el, vagy harmadát nyerheti meg a meglévő 80 ezer forinthez viszonyítva. A nyereség vagy veszteség egyformán valószínű. Az össznyeremény várható értéke tehát:

$$80000 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-X}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{X}{3} = 80000$$

forint. Nincs értelmes ok a változtatásra! Máskülönben is: jobb ma egy veréb, mint holnap egy tüzök. Még pontosabban: jobb ma egy veréb, mint holnap vélhető átlagban ugyanaz az egy veréb.

**Harmadik változat:** Az okos versenyző az előző két változatot is végiggondolta pár pillanat alatt, és úgy gondolja, hogy a változtatással legalább is várható értékben sohasem veszít. Fel volt tételezve, hogy a borítékok tartalma eleve adott. Az esetleges cserére vonatkozó ajánlatát a műsorvezető csak akkor tette meg, amikor már látta a tízezreket. Feltételezhető, hogy eleve utasítást kapott előre, hogy a tízezrek láttán adja meg a csere lehetőségét, de már mondjuk húszezresek esetében ne. A műsorvezető feladata nem az, hogy spóroljon a tévécsatorna pénzével, hanem inkább az, hogy még izgalmasabbá tegye a műsort. A hosszú reklámok másodpercenként többet hoznak a tévécsatornának, mint az esetleges pár tízezres veszteség. Ha nem volna érdemes a borítékot kicserélni, akkor hosszú távon unalmassá válna a műsor, újat kellene kitalálni és elindítani (hatalmas költséggel), és közben csökkennének a reklámbevételek. Feltételezhető tehát, hogy a műsorvezető a kisebb értékű boríték választása esetén van inkább kötelezve az ajánlata megtételére, mint a nagyobb értékű boríték választása esetén.

Jelölje rendre  $p_1, p_2, p_3$  annak a valószínűségét, hogy a műsorvezető ötezreseket, tízezreseket illetve húszezreseket lát a kért borítékban, és ennek láttán felkínálja a csere lehetőségét. (Ha a választott borítékban ötezresek találtattak volna, nyilván azt állította volna a műsorvezető, hogy a másik borítékban feleannyi darab ötezres, vagy ugyanannyi darab tízezres van.) Feltesszük, hogy  $p_1 > p_2 > 0 = p_3$ . Ha történetesen tízezresek voltak a választott borítékban, akkor tegyük fel, hogy a másik borítékban  $q$  valószínűséggel vannak ötezresek és  $1 - q$  valószínűséggel vannak húszezresek. Tehát összesen 3 elméleti lehetőséggel kell számolnunk: az első, hogy ötezresek vannak a másik borítékban, és nincs csere lehetősége, a második, hogy ötezresek vannak, és van csere lehetősége, a harmadik, hogy húszezresek vannak. A három lehetőség esélyeinek aránya:

$$(1 - p_1)q \quad : \quad p_1q \quad : \quad (1 - q)$$

Tehát azon esélyek aránya, hogy káros vagy hasznos lesz-e a csere (feltéve, hogy felkínáltatik):

$$p_1 q \quad : \quad (1 - q)$$

Mivel a lehetséges haszon kétszerese a lehetséges veszteségnek, akkor érdemes élni a csere lehetőségével, ha

$$p_1 q < 2(1 - q)$$

Ez mindig fennáll, ha  $q < \frac{2}{3}$ , de még akkor is fennállhat, ha  $q \geq \frac{2}{3}$ . A következő táblázat azokat a  $p_1$  értékeket mutatja, amikor érdemes élni a csere lehetőségével:

$q =$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$p_1 <$	0.86	0.67	0.50	0.35	0.22	0.11

A csere lehetőségét akkor érdemes visszautasítani a leginkább, ha

$$2(1 - q) - p_1q$$

minimális, azaz ha  $p_1 = q = 1$ . Ebben a legrosszabb esetben a csere 50 százalékos veszteséget jelentene. Ugyanakkor a  $p = q = 0.9$  esetben már csak 30 százalék körüli a veszteség. A  $p = q = 0.8$  esetben pedig már csak 12 százalék.

A nulla veszteség a

$$p = q = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$$

értéknél van.

Összefoglalva: Érdemes elfogadni a felkínált csere lehetőségét, ha vélhetően  $q < 0.67$  vagy vélhetően  $p$  és  $q$  mindegyike kisebb 0.73-nál. Feltételezve, hogy a



tévécsona érdekei inkább az 1-hez közeli  $p$ , és az  $\frac{1}{2}$ -hez közeli  $q$  értékeket vélelmeztetik, a felkínált csere lehetőségének az elfogadása az ajánlott.

Nyájas Olvasó! Nem áruljuk el, hogy a három értelmezés közül melyiket tartjuk igazán helyesnek. Beszéljük meg drótpostán! Ha Önnek egy negyedik értelmezése van, küldje el nekünk, vagy talán inkább induljon el a vetélkedőn!