Haladvány Kiadvány 2017.01.04

Egy feladvány az új esztendő köszöntésére

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

.

Legyenek a, b, c, d egész számok, továbbá legyen

$$E = \frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}$$

Bizonyítandó, hogy ha $a + b + c + d$ osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel és 2017-tel, akkor $E/2017$ egész szám.

Első bizonyítás. Hosszas, aprólékos számolással ellenőrizhetjük, hogy

$$\begin{aligned} 30E &= 30\left(\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{5} - \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right) \\ &= 6\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) - 5\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \\ &= (a+b+c+d)\left(a^4+b^4+c^4+d^4-6abcd-P-4Q+2R\right) \end{aligned}$$

ahol

$$
\begin{aligned}
P &= a^3b + a^3c + a^3d + ab^3 + ac^3 + ad^3 \\
&\quad + b^3c + b^3d + bc^3 + bd^3 + c^3d + cd^3 \\
Q &= a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 \\
R &= abc^2 + ab^2c + a^2bc + abd^2 + ab^2d + a^2bd \\
&\quad + acd^2 + ac^2d + a^2cd + bcd^2 + bc^2d + b^2cd
\end{aligned}
$$

Mivel $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ és 2017 prím, ezért

$$\frac{a+b+c+d}{30 \cdot 2017}$$

egész szám, amiből már látszik a bizonyítandó állítás.

Második bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy E egész szám, azaz $30E$ olyan egész szám, mely osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel.

$$30E = 6\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) - 5\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Látható, hogy $30E$ egész szám. Mivel $a+b+c+d$ osztható 2-vel, ezért a, b, c, d között páros sok páratlan szám van, így a^2, b^2, c^2, d^2 között is, tehát $a^2+b^2+c^2+d^2$ páros, és így $30E$ is páros szám. Mivel 5 prím, ezért a kis Fermat-tétel szerint

$$\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) - (a+b+c+d)$$

osztható 5-tel, tehát $30E$ is 5-tel osztható szám. Hasonlóképpen a kis Fermat-tétel szerint

$$\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) - (a+b+c+d)$$

osztható 3-mal, tehát $30E$ is 3-mal osztható.

Megkaptuk tehát, hogy E egész, ezért a továbbiakban csak azt kell kimutatnunk, hogy osztható 2017-tel. Mivel 2017 prím, ezért elegendő a 2017-elemű véges számtestben számolnunk; itt azt kell megmutatnunk, kogy $E = 0$. Lévén az $a = b = c = d$ eset triviális, szimmetria alapján az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $d \neq 0$. Lévén E alakja egy homogén ötödfokú, négyhatározatlanú polinom, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $d = -2$. Mivel $a + b + c + d = 0$, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a véges testből vett valamely x és y elemekre fennáll $a = 1 - x$,

$b = 1 - y$, $c = x + y$. Mármost

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{(1-x)^5 + (1-y)^5 + (x+y)^5 \ + (-2)^5}{5} \\
&\quad - \frac{(1-x)^3 + (1-y)^3 + (x+y)^3 + (-2)^3}{3} \\
&\quad \cdot \frac{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (x+y)^2 + (-2)^2}{2} \\
&= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + y^4 - 2y^3 + 2y^2 - y \\
&\quad + x^4y + xy^4 + 2x^3y^2 + 2x^2y^3 - 6 \\
&\quad - \left(x^2 - x + y^2 - y + x^2y + xy^2 - 2\right) \\
&\quad \cdot \left(x^2 - x + y^2 - y + xy + 3\right) \\
&= \ x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + y^4 - 2y^3 + 2y^2 - y \\
&\quad + x^4y + xy^4 + 2x^3y^2 + 2x^2y^3 - 6 \\
&\quad -x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - y^4 + 2y^3 - 2y^2 + y \\
&\quad - x^4y - xy^4 - 2x^3y^2 - 2x^2y^3 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Harmadik bizonyítás.

$$30E = 6\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) - 5\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy $30E$ kongruens 0-val modulo 60510. Itt $60510 = 30\cdot 2017$. Mivel $a+b+c+d$ osztható 60510-zel, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy modulo 60510 értve $d = -(a+b+c)$. Mármost

$$\begin{aligned} & 6\left(a^5+b^5+c^5+d^5\right) \\ = \; & 6\left(a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5\right) \\ = \; & -30\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \\ = \; & 5\left(a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3\right) \\ = \; & -15\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& a^2+b^2+c^2+d^2 \\
= \; & a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \\
= \; & 2\left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right)
\end{aligned}
$$

Már látható, hogy $30E$ kongrues 0-val modulo 60510.