Mindennapi hatványösszegeink

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

February 1, 2017

Haladvány Kiadvány, **2017.02.01.,** http://www.math.bme.hu/~hujter/170201.pdf

Bevezetés

Az **általánosított hatványközepeket**

$$H_\alpha := \sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}} \tag{1}$$

és **hatványösszegeket**

$$S_\alpha := \sqrt[\alpha]{x_1^\alpha + ... + x_n^\alpha} = \sqrt[\alpha]{n} \cdot H_\alpha \tag{2}$$

már lassan másfél évszázada "feltalálták": $x_1, ..., x_n$ tetszőleges *nemnegatív* valós számok, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, ráadásul "körülöttünk élnek". Mégis nagyon kevéssé ismertek mind a tanárok, diákok, mind a szakemberek körében.

Ebben a cikkben pár egyszerű középiskolás feladatot elemzünk (sorrend nélkül): meglepő α kitevőkkel találkozunk, melyeket a cikk legvégén táblázatban is összefoglalunk. (A 2*. Feladat Descartes tétele, bizonyítása nem egyszerű!)

A H_α hatánymközepeket néha **Hölder középértéknek** is nevezik (Otto Hölder, 1859-1937, német matematikus) után, de *nem* a fenti 6 egyenlőtletséget nevezik Hölder-egyenlőtlenségnek (lásd pl. [9], [10]). A $H, S, K, M, ...$ betűket nem egységesen használja a szakirodalom.

[13] -ben H_α és S_α (1) és (2) rengeteg gyakorlati, matematikai és műszaki alkalmazását ismerhetjük meg, sajnos a magyar nyelvű [11] honlapon nincs ilyen felsorolás.

[14] 6. része érdekesen szemlélteti a *Pitagoraszi középértékeket* a trapéz különböző középvonalaival. A súlyozott középértékekről [4], [5] és [11] -ben is olvashatunk.

1 H_α és S_α tulajdonságai

Azonnal szembeötlik, hogy:

$\alpha = 1$ esetén $H_1 = A =$ *számtani (aritmetikai) közép,*

$\alpha = 2$ esetén $H_2 = Q =$ *négyzetes (kvadratikus) közép,*

$\alpha = -1$ esetén $H_{-1} = H =$ *harmonikus közép,*

továbbá

$\alpha = -1$ esetén $\dfrac{1}{S_{-1}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ a fizikából jól ismert "*replusz*" (reciprok plusz).

Aránylag könnyen belátható még (lásd pl. [12]):

$$\lim_{\alpha\to+\infty} H_\alpha(x_1,...,x_n) = \max(x_1,...,x_n)\ , \tag{3}$$
$$\lim_{\alpha\to-\infty} H_\alpha(x_1,...,x_n) = \min(x_1,...,x_n)\ , \tag{4}$$

és

$$\lim_{\alpha\to 0} H_\alpha(x_1,...,x_n) = \sqrt[n]{x_1\cdot ...\cdot x_n} \tag{5}$$

a *mértani (geometriai) közép*, továbbá tetszőleges $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ esetén

$$H_\alpha(x_1,...,x_n) \le H_\beta(x_1,...,x_n) \tag{6}$$

és $=$ pontosan csak akkor van, ha $x_1 = ... = x_n$ (a bizonyítást ld. pl. [12]-ben).

Tehát a H_α közepek messzemenő általánosításai a **Pitagoraszi középértékeknek** (számtani, mértani, stb.), sőt **súlyozott** változataik is gyakran használatosak: *tetszőleges* $w_1,...,w_n \in \mathbb{R}^+$ pozitív súlyokra

$$H_\alpha^w := \sqrt[\alpha]{\frac{w_1x_1^\alpha + ... + w_nx_n^\alpha}{w_1+...+w_n}} \quad \textit{és} \quad S_\alpha^w := \sqrt[\alpha]{w_1x_1^\alpha + ... + w_nx_n^\alpha}\ , \tag{7}$$

amely a $w_i' := \dfrac{w_i}{w_1+...+w_n}$ helyettesítés után

$$H_\alpha^w := \sqrt[\alpha]{w_1'x_1^\alpha + ... + w_n'x_n^\alpha} \quad (w_1' + ... + w_n' = 1)$$

alakban is írható. Speciálisan $w_1 = ... = w_n = 1$ azaz $w_i' = \frac{1}{n}$ esetén visszakapjuk (1)-et.

H_α és S_α **homogén függvények:** tetszőleges $0 < \sigma$ valós számra

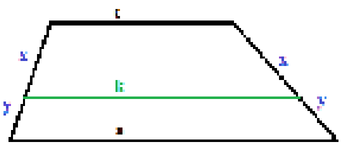
$$H_\alpha(\sigma x_1,...,\sigma x_n) = \sigma\cdot H_\alpha(x_1,...,x_n)$$

és

$$S_\alpha(\sigma x_1,...,\sigma x_n) = \sigma\cdot S_\alpha(x_1,...,x_n)\ .$$

A feladatok

0. Feladat: *Mutassuk meg, hogy a trapéz* általánosított középvonala *az oldalak súlyozott számtani közepe:* $k = \dfrac{ax+cy}{x+y}$.

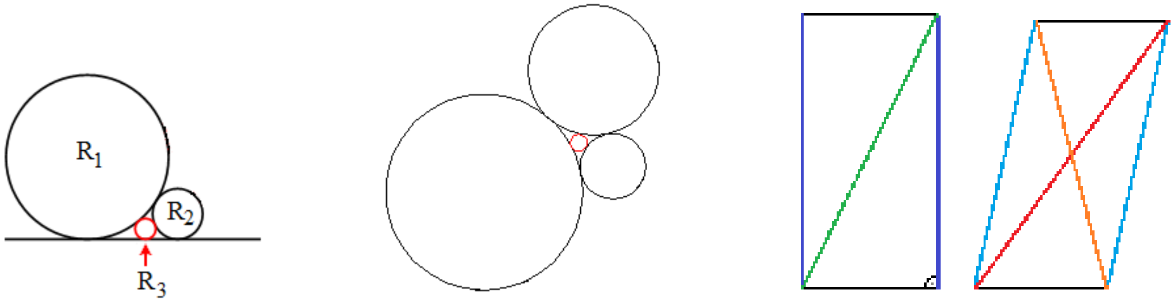


0.ábra: *Trapéz általános középvonala*

1. Feladat: *Érintse három kör mindegyike a másik kettőt és egy egyenest. Milyen összefüggés van a három kör sugara között?*

2. Feladat*: *Érintse* négy *kör mindegyike mindegyik másikat. Milyen összefüggés van a körök sugarai között?*

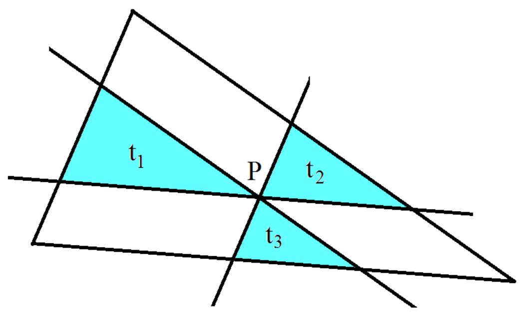
3. Feladat: *Két-két azonos hosszú (*a *és* b*) lécből készítettünk ajtókeretet, de nem lett derékszögű. Milyen összefüggés van az így kapott paralelogramma átlói és a tervezett téglalap átlója között?*



1.-3. ábrák: *Az 1.-3. feladatokhoz*

4. Feladat: *Milyen összefüggés van egy háromszög beírt- és hozzáírt köreinek sugarai között?*

5. Feladat: *Húzzunk párhuzamosokat egy tetszőleges háromszög tetszőleges belső pontjá keresztül. Milyen összefüggés van a keletkezett kis háromszögek és a nagy háromszög alábbi méretei között:*
a) *területek*, **b)** *kerületek*, **c)** *körülírt körök átmérői*, **d)** *szögek összege*,
e) *mint alapok fölé írt egységnyi magasságú hasábok térfogatai*,
f) *mint alapok fölé írt olyan tetraéderek térfogatai, amelyekben az alaplap és az oldallapok egy rögzített ω szöget zárnak be.*



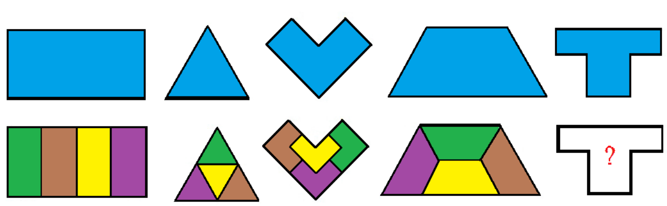
4.ábra: *Az 5.a) feladathoz*

6. Feladat: *Egy tetszőleges tetraéder tetszőleges belső pontján átmenve húzzunk párhuzamos síkokat a lapokkal. Milyen összefüggés van a keletkezett kis tetraéderek és a nagy tetraéder alábbi méretei között:*
a) *térfogatok*, **b)** *felszínek*, **c)** *körülírt gömbök átmérői*, **d)** *élek összege.*

7. Feladat: *Bontsunk fel egy n dimenziós tetraédert vagy kockát m* (nem feltétlenül egybevágó) *kisebb tetraéderre/kockára. Milyen összefüggés van az eredeti test és a kis testek ℓ dimenziós felületei között?*

Megjegyzés: A feladat nem említi, hogy a kis testeknek hasonlóaknak kell lenniük a nagy testhez. A feladat ez a feltétel nélkül nyilván megoldhatatlan.

Azonban a feladat (pontosabban a keresett összefüggés) nem csak tetraéderekre és kockákra érvényes, hanem bármilyen n dimenziós testnek hozzá hasonló testekre történő felbontására is. (Lásd még [3] és az 5. ábrát.)



5.ábra: *A 7. feladathoz*

Megoldások

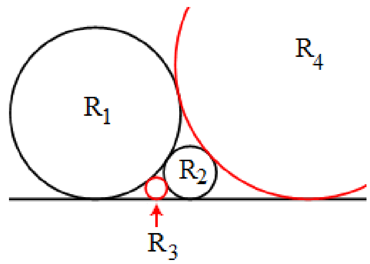
1. Feladat megoldása: A körök középpontjaiból bocsássunk merőlegeseket az egyenesre és a most behúzott merőlegesekre. Néhány Pitagorasz tétel és kis rendezés után megkapjuk a végeredményt:

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \ , \tag{8}$$

azaz

$$R_3 = S_{\frac{-1}{2}}\left(R_1, R_2\right) \ ,$$

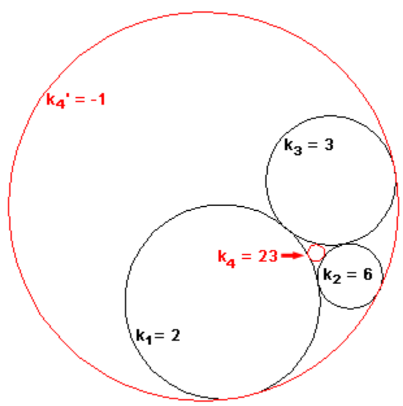
vagyis $\boxed{\alpha = \frac{-1}{2}}$!



6.ábra: *Az 1. feladat két megoldása*

Ne feledjük: ha az R_1 és R_2 sugarú körök előre adottak, akkor a feladatnak két megoldása van (a fenti két első ábra szerint), a második esetben $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1}}$.

2. Feladat* megoldása: A feladatnak ismét két megoldása van: az egyik körön *kívül* vagy *belül* van a másik három:



7.ábra: *A 2. feladat két megoldása*

Ez a feladat **Descartes** tétele ([6], [7]):

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2}\right) \tag{9}$$

vagyis

$$\left[S_{-1}\left(R_1, ..., R_4\right)\right]^2 = 2 \cdot S_{-2}\left(R_1, ..., R_4\right) \ ,$$

vagy más szokásos alakjai

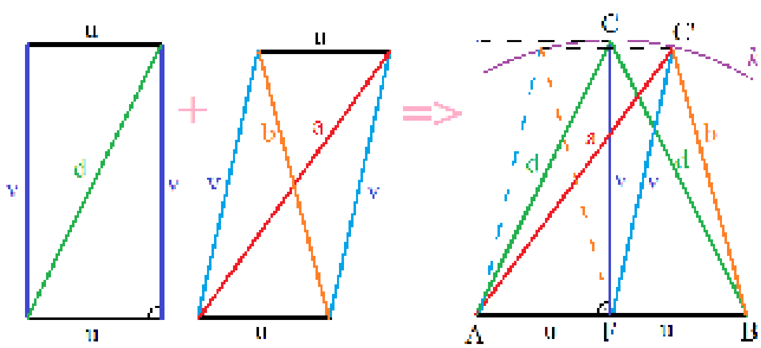
$$\left(k_1 + k_2 + k_3 + k_4\right)^2 = 2\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2\right) \tag{10}$$

és
$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm \sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} \tag{11}$$
ahol
$$k_i = \frac{1}{r_i}$$
az i -dik kör **görbülete**. Amennyiben a k_4 körön belül van a másik három kör, akkor R_4 -et és k_4 -et negatívnak kell tekintenünk (9) ill. (10)-ben, valamint (11)-ben a $\pm$ helyén $-$ előjel áll.

A tétel bizonyítása nem könnyű, a (körre vonatkozó) *inverzióval* lehetséges. Kiemeljük, hogy a magyar nyelvű Wikipédia [8] más tételt említ a "Descartes tétele" címszó alatt. [7]-ben a tétel általánosítása is megtalálható $n+2$ gömbre az n (tetszőleges) dimenzióban, ez már **Thorold Gosset** tétele. A köröket [6]-ban **Soddy-körök-**nek is nevezik. A feladat eredete az *Apollonius-problémá*hoz vezethető vissza: [16]. (Pergai **Apollonius** kb. 262-190 között élt Krisztus előtt, az "Apollonius-problémáról" sajnos magyar nyelvű wikipédia honlap nincs.)

A 2.feladat *speciális esetének* tekinthetjük az 1.feladatot: az egyenes görbülete nulla. $k_4 = 0$ (vagyis "$r_4 = \infty$") esetén (9)-(11) mindegyike ekvivalens (8)-val.(Ennek belátása viszont egyszerű középiskolás feladat.)

3. Feladat megoldása:



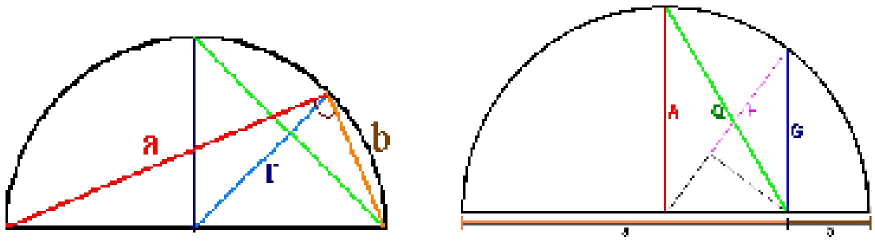
8.ábra: *A 3. feladat megoldása és általánosítása*

Az *auv* és *buv* háromszögekre felírva a koszinusz-tételt
$$\begin{aligned} a^2 &= u^2 + v^2 - 2uv\cos(\gamma) \\ b^2 &= u^2 + v^2 - 2uv\cos(180^o - \gamma) \end{aligned}$$
és összeadva
$$a^2 + b^2 = 2\left(u^2 + v^2\right) = 2d^2$$
vagyis
$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = H_2(a, b)\ ,$$
a téglalap átlója *négyzetes közepe* a paralelogramma átlóinak, vagyis $\boxed{\alpha = 2}$!

Ha a téglalap és a paralelogrammák u oldalát egyazon szakaszra mérjük fel, a 8. ábra jobb oldalán látható módon, akkor láthatjuk, hogy a paralelogrammák (jobb felső) C' csúcsai a T középpont körüli, v sugarú körön mozognak. A fenti számolások szerint pedig újabb összefüggést kaptunk:

Tétel: *A kör függőleges TC sugara (mindig)* négyzetes közepe *az $a = AC'$ és $b = BC'$ szakaszoknak.*

Ez pedig *általánosítása* a körbe írt derékszögű háromszög tulajdonságának: a kör sugara négyzetes közepe a befogóknak: $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (baloldali ábra).



9. ábra: *A négyzetes közép kétféle szemléltetése*
jobboldali ábra: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_means

Vegyük észre, hogy a most felírt összefüggés nem azonos a számtani-, mértani- és négyzetes közepek szokásos, jobboldani ábráján látható szemléltetéssel. Amint a koszinusztétel a Pitagorasz tétel általánosítása, úgy a Pitagorasz tételt is tekinthetjük a négyzetes közép egyfajta változatának.

A 3. feladat eredete és alkalmazása megtalálható [2]-ben.

4. Feladat megoldása: Közismert, hogy a háromszögbe beírt kör sugara $r = \dfrac{T}{s}$ és az oldalakhoz kívül írt körök sugarai $r_a = \dfrac{T}{s-a}$, $r_b = \dfrac{T}{s-b}$ és $r_c = \dfrac{T}{s-c}$, amikből könnyen következik, hogy

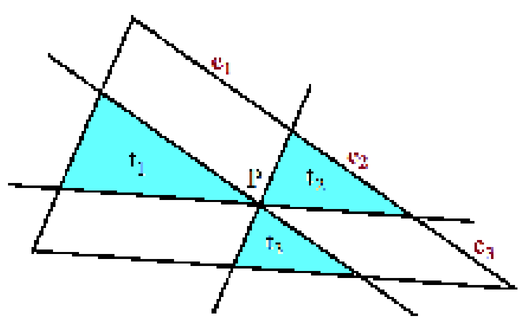
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \ ,$$

azaz

$$r = S_{-1}\left(r_a, r_b, r_c\right) \ ,$$

vagyis $\boxed{\alpha = -1}$.

5. Feladat megoldása: Jelöljük a kis háromszögeknek a nagy háromszög c oldalával párhuzamos oldalait c_1 , c_2 és c_3 -vel.



10. ábra: *Az 5. Feladat megoldása*

A kis háromszögek nyilván hasonlóak a eredeti háromszöhöz, a hasonlóságok arányai $\lambda_i = \dfrac{c_i}{c}$ és nyilván

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \ . \tag{12}$$

a) Mivel $t_i = \lambda_i^2 \cdot T$, ezért (12) alapján

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T} \ , \tag{13}$$

azaz

$$T = S_{\frac{1}{2}}\left(t_1, t_2, t_3\right) \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$.

b) A kis háromszögek *kerületei* $k_i = \lambda_i \cdot K$, ezért (12) alapján

$$k_1 + k_2 + k_3 = K \ , \tag{14}$$

azaz

$$K = S_1\left(k_1, k_2, k_3\right) \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = 1}$.

A (14) összefüggés közvetlenül is látszik a 10. ábrán: a kis háromszögek oldalait párhuzamosan eltolva a nagy háromszög oldalait hiánytalanul megkapjuk.

c) A b) feladathoz hasonlóan a körülírt körök átmérői $d_i = \lambda_i \cdot d$, ahonnan

$$d_1 + d_2 + d_3 = d \ , \tag{15}$$

azaz

$$d = S_1\left(d_1, d_2, d_3\right) \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = 1}$.

d) A szögek összege mindegyik háromszögben $\Pi_i = 180^o$ és $\Pi = 180^o$, így nyilván (kicsit nagyképűen)

$$\frac{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}{3} = H_1\left(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\right) = \Pi \ , \tag{16}$$

és ebben az esetben is $\boxed{\alpha = 1}$. (A háromszögek hasonlóságai alapján felírhatnánk a $\Pi_i = \lambda_i^0 \cdot \Pi$ összefüggést is a b) és c) esetekben alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan, de mivel a (12) összefüggésből nem tudunk 0 -adik gyököt vonni, így tényleg $\alpha \neq 0$.)

e) Mivel rögzített magasság esetén a térfogatok az alapterülettel arányosak, és most mindegyik magasság ugyanakkora, ezért (13) alapján

$$\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} + \sqrt{V_3} = \sqrt{V} \ ,$$

azaz

$$V = S_{\frac{1}{2}}\left(V_1, V_2, V_3\right) \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$.

f) Mivel a tetraéderek alapterületei hasonlóak és az alaplapnak az oldallapokkal bezárt szögei ugyanakkorák, ezért a tetraéderek hasonlóak, λ_1 , λ_2 és λ_3 aránnyal, így $V_i = \lambda_i^3 \cdot V$, tehát (12) alapján

$$\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} = \sqrt[3]{V} \ ,$$

azaz

$$V = S_{\frac{1}{3}}\left(V_1, V_2, V_3\right) \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$.

6. Feladat megoldása: Bár a keletkezett kis tetraéderek szemmel láthatóan hasonlóak az eredeti tetraéderhez, a $\lambda_1, ..., \lambda_4$ hasonlósági arányokra nekem nem sikerült elsőre igazolnom a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \tag{17}$$

egyenlőséget. A feladat **I.** megoldásban kevesebb szemléltetéssel de több számolással oldjuk meg a feladatot (17) nélkül, ez a gondolatmenet magasabb dimenzióra is könnyen általánosítható. A **II.**

megoldás legelején elemei geometriai fejtegetéssel (ami úgy tűnik, csak 3 dimenzióra alkalmazható) igazoljuk az (17) összefüggést - ami alapján a feladat kérdéseire már azonnal válaszolhatunk.

6. Feladat I. megoldása: Legyenek a tetréder csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4 . A P pontot a csúcsokkal összekötve a tetraédert négy kisebb tetraéderre bontjuk fel, melyek magasságai P -nek a lapoktól vett távolságai, amelyeket jelöljünk x_1, x_2, x_3, x_4 -el. Ekkor

$$x_1 \cdot T_1 + x_2 \cdot T_2 + x_3 \cdot T_3 + x_4 \cdot T_4 = 3V \ . \tag{18}$$

A feladatban szereplő kis tetraéderek hasonlóak az A_1, A_2, A_3, A_4 tetraéderhez, a hasonlóság aránya $\lambda_i = \dfrac{x_i}{m_i}$ ahol m_i a tetraéder megfelelő magassága. Így a kis tetraéderek térfogatai:

$$V_i = \left(\frac{x_i}{m_i}\right)^3 \cdot V = \left(\frac{x_i}{m_i}\right)^3 \cdot \frac{m_i T_i}{3} = \frac{x_i^3 T_i}{m_i^2 \cdot 3} = \frac{x_i^3 T_i^3}{\frac{m_i^2 \cdot T_i^2}{3^2} \cdot 3^3}$$

ahonnan

$$3 \cdot \sqrt[3]{V_i \cdot V^2} = x_i T_i$$

amit visszaírva (18)-ba kapjuk:

$$3 \cdot \sqrt[3]{V^2} \cdot \left(\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}\right) = 3V$$

vagyis

$$\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4} = \sqrt[3]{V} \tag{19}$$

azaz

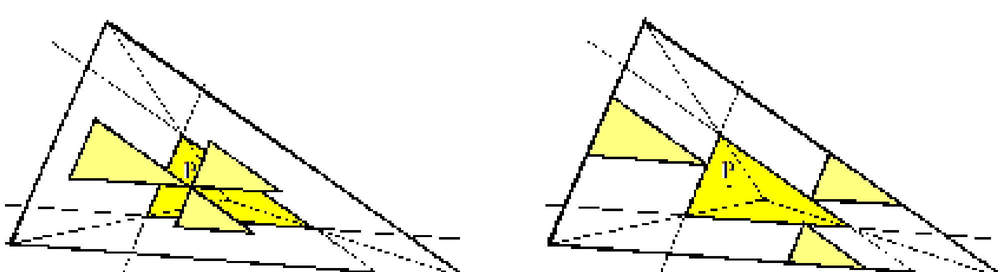
$$S_{\frac{1}{3}}\left(V_1, V_2, V_3, V_4\right) = V$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$.

Megjegyzések: i) A kapott (19) egyenlőségbe ha beírjuk a $V_i = \lambda_i^3 \cdot V$ azonosságot, akkor azonnal megkapjuk a keresett (17) összefüggést. Emiatt a feladat további kérdéseire már (17) alapján, a II. megoldásban válaszolunk.

ii) A (18) -hoz hasonlő egyenlőségeket kielégítő ponthalmazokkal az [1] cikkben foglalkozunk, az eredmények könnyen általánosíthatók tetszőleges dimenzióra is.

6. Feladat II. megoldása: A baloldali ábrán felülnézetben ábrázoljuk a P pont által meghatározott négy kis (sárga) tetraédert, melyek közös csúcsa P. A citromsárga tetraéder a nagy tetraéder (vízszintes) alaplapján helyezkedik el. Mivel a másik három (fakósárga) kis tetraéder a három oldallapra "támaszkodik", és a P -re illeszkedő síkok párhuzamosak a lapokkal, ezért ezt a három (fakósárga) kis tetraédert a nagy tetraéder oldallapjain "lecsúsztathatjuk" az alaplapra - és a jobboldali ábrát kapjuk. Erről pedig leolvasható, hogy a négy kis tetraéder egyirányba eső oldalainak összege éppen a nagy tetraéder megfelelő oldalát adják. Ez pedig igazolja a (17) összefüggést!



11. ábra: *A tetraéderek felülről és lecsúsztatva*

a) a $V_i = \lambda_i^3 \cdot V$ és (12) összefüggések alapján

$$\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4} = \sqrt[3]{V} \ ,$$

azaz

$$V = S_{\frac{1}{3}}\left(V_1, V_2, V_3, V_4\right)$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$.

b) $A_i = \lambda_i^2 \cdot A$ és (12) alapján

$$\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} + \sqrt{A_4} = \sqrt{A} \ ,$$

azaz

$$A = S_{\frac{1}{2}}\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)$$

tehát $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$.

c) és **d)** $d_i = \lambda_i \cdot d$, $K_i = \lambda_i \cdot K$ és (12) alapján

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = S_1\left(d_1, d_2, d_3, d_4\right) = d$$

és

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = S_1\left(K_1, K_2, K_3, K_4\right) = K \ ,$$

tehát $\boxed{\alpha = 1}$.

7. Feladat megoldása: A feltételek szerint a kis testek hasonlóak az eredeti (nagy) testhez, így $V_i = \lambda_i^n \cdot V$ és

$$\lambda_1^n + ... + \lambda_t^n = 1 \ . \tag{20}$$

Továbbá az ℓ -dimenziós felületekre $A_i^{(\ell)} = \lambda_i^\ell \cdot A^{(\ell)}$ (minden $0 \le \ell \le n$ esetén), ahonnan $\ell \neq 0$ esetén

$$\left(\sqrt[\ell]{A_1^{(\ell)}}\right)^n + ... + \left(\sqrt[\ell]{A_t^{(\ell)}}\right)^n = \left(\sqrt[\ell]{A^{(\ell)}}\right)^n \ , \tag{21}$$

azaz

$$S_{\frac{n}{\ell}}\left(A_1^{(\ell)}, ..., A_t^{(\ell)}\right) = A^{(\ell)} \ ,$$

vagyis $\boxed{\alpha = \frac{n}{\ell}}$, míg $\ell = 0$ esetén $\Pi_i = \Pi =$ a szögek összege (ráadásul $\Pi_i = \lambda_i^0 \cdot \Pi$), (16)-hoz hasonlóan nyilván

$$\frac{\Pi_1 + ... + \Pi_t}{t} = \Pi \ , \tag{22}$$

azaz

$$H_1\left(\Pi_1, ..., \Pi_t\right) = \Pi \ ,$$

vagyis ez esetben $\boxed{\alpha = 1}$.

Az $\ell = 1$ esetben az élek K_i összegét számoljuk, ekkor speciálisan (meglepő, de igaz):

$$K_1^n + ... + K_t^n = S_n\left(K_1, ..., K_t\right) = K^n \ , \tag{23}$$

vagyis ez esetben $\boxed{\alpha = n}$.

Összefoglalás

A feladatokban az alábbi α kitevőkkel találkoztunk:

α	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1. Feladat	$\frac{-1}{2}$					
2. Feladat	-					
3. Feladat	2					
4. Feladat	-1					
5. Feladat	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
6. Feladat	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1		
7. Feladat	$\frac{n}{\ell}$ $(1 \le \ell \le n)$	1				

References

[1] **Szalkai István:** *Egyenesektől való távolságokról*, Polygon, XVI (2008), 45-48, http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Tavolsag3polygon.pdf

[2] **Szalkai István:** *Ácsok és földmérők háromszögei*, Haladvány Kiadvány 2016, http://www.math.bme.hu/~hujter/160424.pdf

[3] **Hujter Mihály, Oláh Béla:** *Négyzetekre bontás - új megoldások régi problémákra*, Haladvány Kiadvány 2008, http://math.bme.hu/~hujter/081017.pdf

[4] **Rzadkowski, G.:** *Remarks on the geometric mean-arithmetic mean inequality*, Math. Gazette, vol 88 No. 512 (2004)

[5] **Urmanin, Z.:** *Generalization of the arithmetic mean - geometric mean - harmonic mean inequality*, Math. Gazette, vol 86, 2002.

[6] *Descartes' theorem*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes'_theorem

[7] *Satz von Descartes*, Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Descartes

[8] *Descartes tétel*, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Descartes-tétel

[9] *Hölder-egyenlőtlenség*, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Hölder-egyenlőtlenség

[10] *Hölder's inequality*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Hölder's_inequality

[11] *Hatványközepek*, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Hatványközép

[12] *Hatványközepek közötti egyenlőtlenség*, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Hatványközepek_közötti_egyenlőtlenség

[13] *Generalized mean*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_mean

[14] *Matematikai közepek*, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_közepek

[15] *Pythagorean means*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_means

[16] *Problem of Apollonius*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius