Haladvány Kiadvány 2017.03.22

Reiman István két feladványáról,

avagy egy irracionális bizonyítás történetéről

.

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

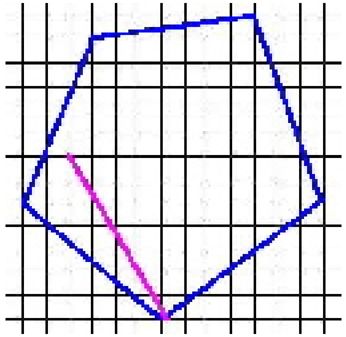
.

Rácssokszögnek nevezzük az euklideszi sík azon sokszögeit, melyek minden csúcsának minkét koordinátája egész szám. Valamikor 1976 elején a nemzetközi matematikai diákolimpia csapatfelkészítő szakkörén Reiman István tanár úr kitűzte a következő két feladatot:

— *Van-e szabályos rácsháromszög?*

— *Van-e szabályos rácsötszög?*

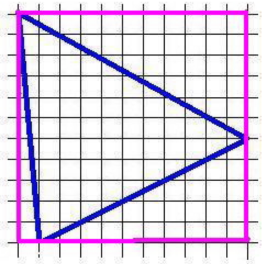
A jelen sorok írója akkor még gimnazista volt, és csak az egyik feladatot tudta megoldani a fenti két példa közül, nevezetesen az elsőt. De kezdjük most a



másikkal. Mivel ez a feladat túl nehéznek bizonyult, Reiman tanár úr elmondta a megoldást.

Tegyük fel, hogy létezik szabályos rácsötszög; tekintsük a lehető legkisebbet. Aztán az egyik csúcsából az egyik oldalát forgassuk be 90 fokkal. Az új csúcs is rácspont lesz. Hasonlóan eljárva a többi oldallal végül nyerünk egy kisebb szabályos rácsötszöget. Ellentmondás!

Folytatta a gondolatmenetet Reiman tanár úr:



Ez a bizonyítás nem működik szabályos háromszögre. Viszont a oldalú szabályos rácsháromszögből hamar megkapunk egy szabályos rácshatszöget a oldallal. Annak a lehetelensége pedig az ötszögéhez hasonlóan meggondolható.

Ekkor a jelen sorok szerzője közbevágott: *Tanár úr, nem kell ilyen körülményes bizonyítás!* A következő ábra alapján nyilvánvaló, hogy az a oldalú szabályos rácsháromszög területének négyszerese egy páros egész szám. Mindazonáltal ez a négyszeres terület ismerten $a^2\sqrt{3}$. Itt a^2 is nyilván egész szám. Mindebből az jön ki, hogy $\sqrt{3}$ racionális! Ellentmondás!

Reiman tanár úrnak annyira megtetszett ez az „irracionális” bizonyítás, hogy beletette egyik későbbi tankönyvébe is.