

Haladvány Kiadvány 2017.03.23

Reiman István egyik fejtörője

egy kakukkos óra megjavításáról

.

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

.

Reiman Istvának sok-sok érdekes matematikai feladványa maradt fenn. Ezek egyikének átfogalmazása a következő:

Egy elromlott kakukkos óra minden órában többször kakukkol egyet-egyet. Két egymás utáni kakukkolás között vagy 2, vagy 4, vagy 6 perc telik el; mindegyik szünethosszúság ugyanolyan gyakoriságú. A kakukkolások ütemezése óránként periodikusan ismétlődik. Igazolandó, hogy a kakukkolásokból elnémítható néhány úgy, hogy pontosan fél óránként ismétlődjenek csak a hangjelzések.

Most ismertetjük a feladvány egyik megoldását.

Mivel $60/(2 + 4 + 6) = 5$, ezért $3 \cdot 5$ kakukkolás van óránként. Nevezzük a kakukkolásokat 22-esnek, 24-esnek, 26-osnak, 42-esnek, 44-esnek, 46-osnak, 62-esnek, 64-esnek vagy 66-osnak attól függően, hogy előttük és utánuk hány perces csend van; például a 46-os kakukkolás előtt 4 perces, utána 6 perces a csend. Vegyük észre, hogy egy 22-es kakukkolás után vagy 28, vagy 30, vagy 32 perccel kell, hogy legyen kakukkolás, mert különben legalább 8 perces csend lenne. Mindazonáltal bármelyik eset is következik be, hamar készen leszünk a bizonyítással.

Feltehetjük tehát, hogy nincs a kakukkolások között 22-es típusú. Mivel 2 perces csendnek óránként éppen 5-ször kell bekövetkeznie, ezért a 15 kakukkolásból éppen 10 darabnak kell a 24-es, 26-os, 42-es, 62-es típusokból kikerülni.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a kakukkolások éppen páros perc időpontokban történnek, tehát például 12:00-kor vagy 12:02-kor, vagy stb,

vagy 12:58-kor. Az itt felsorolt 30 időpont közül 15-ben van kakukkolás, 15-ben csend van. Ha valamely kakukkolás után pontosan 30 perccel is van kakukkolás, készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy a 15 darab csendes páros perc időpont mindegyike után pontosan 30 perccel történik kakukkolás, és a 15 kakukkolás mindegyike után pontosan 30 perccel egy csendes páros perc időpont van. Ebből már következik, hogy egy 62-es, 64-es vagy 66-os kakukkolás után pontosan 26 perccel és pontosan 28 perccel is kell lenni kakukkolásnak. Tehát 6 perces csend vége után éppen 26 perccel egy 2 perces csend kezdődik. Mivel 62-es, 64-es, 66-os kakukkolás összesen 5 darab van óránként, ezen kakukkolások után 26 illetve 28 perccel megkapjuk a 10 darab kakukkolást a 24-es, 26-os, 42-es, 62-es típusokból. Nyilván a 2 perces csendes szakaszok elején van a 42-es vagy 62-es típus, és a végén a 24-es vagy 26-os típus.

Mivel óránként 5-ször van 6 perces szünet, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a 12:00, 12:02, 12:04, ..., 12:28 időpontok közül pontosan 3-szor kezdődik el egy-egy 6 perces szünet, és éppen 12:00-kor is van kakukkolás,

még hozzá 62-es vagy 64-es vagy 66-os típusú. Ekkor tehát 12:28-kor is van kakukkolás. A fentiek szerint az itteni 28 perc hosszú intervallum tartalmaz 3 darab 6 perces és 2 darab 2 perces szünetet. Ez összesen $3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 22$ perc. Mivel 28 osztható 4-gyel, de 22 nem, ez ellentmondás, hiszen a többi szünetnek mind 4 percesnek kell lenni.

A megnyert ellentmondás bizonyítja, hogy a 15 kakukkolásból elnémítható 13 úgy, hogy a maradék 2 között éppen 30 perc legyen az időkülönbség.