

Haladvány Kiadvány 2017.03.26

Egy tételről, melyet Dürer majdnem megtalált

Hujter Mihály

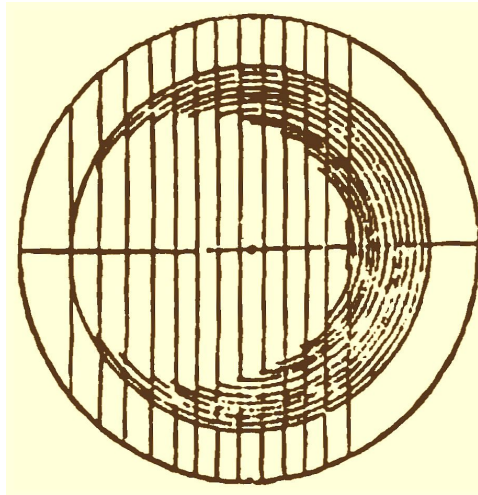
hujter.misi@gmail.com

A német reneszánsz legfontosabb alakjaként ismert *Albrecht Dürer*. Mivel apja (idősebb Albrecht Dürer, azaz Ajtósi Albert) Magyarországon született (Gyula közelében), sőt anyai nagyanyja is (Öllinger Kinga, Sopron), Dürer neve *ifjabb Ajtósi Albert* változatban is ismeretes a magyar nyelvterületeken.

Dürer egyik munkájában az ellipszisek egy matematikailag helyes (általában kifejlesztett) definícióját adja. Adva van két koncentrikus kör, és a köztük lévő körgyűrű egyenletesen változó sugarú koncentrikus körvonalakkal 12 körgyűrűre van osztva. A körgyűrűk tehát azonos szélességűek. Ha a két eredeti kör sugarát R és r betűkkel jelöljük, akkor tehát a 12 körgyűrű vastagsága egyaránt $(R - r)/12$. Itt nyilván $R > r > 0$.

A körvonalak közös középpontján átmenő vízszintes egyenesen fel van mérve a középpontból balra az R sugár, a középponttól jobbra az r sugár, továbbá az $R + r$ hosszúságú vízszintes — mely majd a definiálódó ellipszis hosszabbik tengelye lesz — egyenletesen fel van osztva 12 részre, és mindegyik osztópontonál fel van véve egy-egy függőleges egyenes.

Ha most a köríveket a nagyobb sugarútól a kisebbik irányában haladva megszámozzuk 0-tól 12-ig és a függőlegeseket is megszámozzuk balról jobbra 0-tól 12-ig, akkor azt látjuk, hogy a 0 sorszámú függőleges érinti a 0 sorszámú kört, az



$i = 1, 2, \dots, 11$ sorszámú körvonal két pontban metszi az ugyanolyan sorszámú függőleget, és végül a 12 sorszámú kör érinti a 12 sorszámú függőleget. A két érintési pont és a 22 metszéspont adja meg az ellipszis elegendően sűrű kipontozását a papíron, hogy szabad kézi rajzzal körvonalazódhasson az ellipszis.

Dürer korában még nem létezett precíz matematikai analízis. Napjainkban már inkább így fogalmaznánk: valamely adott p és q pozitív számokra a vízszintesen

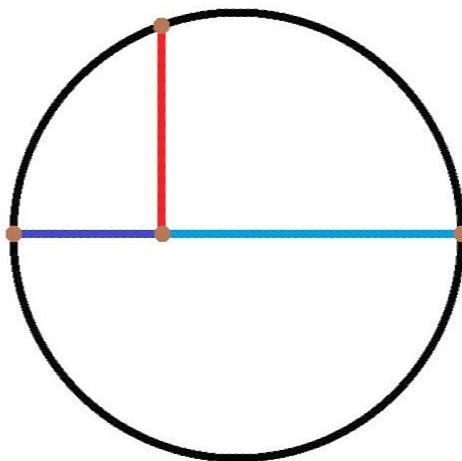
az $R + r$ hosszúságú szakaszt osszuk fel $p : q$ arányban, a jobbra lévő, $R - r$ hosszúságú szakaszt pedig $q : r$ arányban, majd az elsőként megadott osztópontnál lévő függőleges, és a másodikként megadott osztópontnál lévő körív metszéspontjait tekintsük! Miközben a p/q arány változtatjuk, ezek a metszéspontok befutják az ellipszis vonalát, nevezetesen az egyik fél ellipszist a vízszintes tengely fölött, a másik fél ellipszist a vízszintes tengely alatt, szimmetrikusan.

Dürer eredeti ábrája azonban meglehetősen pontatlan. A pontatlan ábrából Dürer azt a hibás következtetést vonta le, hogy az ellipszis tojás alakú, azaz a bal oldala kissé vastagabb, mint a jobb oldala. Pedig nagyon közel állt ahhoz a felfedezéshez, hogy az általa helyesen definiált ellipszis középpontosan is szimmetrikus. Dürer csak a vízszintes tengelyre való szimmetriát látta meg, azt helyesen.

Dürer korának legjobban képzett geométere volt. Birtokolt egy Euklidesz-kötetet, és olyan valakitől tanulhatott geometriát, akinek az egész reneszánsz legnagyobb

matematikusa, Regiomontanus volt a mestere. Sőt Dürer ugyanabban a házban élt és dolgozott, ahol pár évtizeddel korábban Regiomontanus is működött. Joggal feltételezhetjük tehát, hogy Dürer ismerte azt a régi geometria tételt, melyet a következő ábrával szemléltetünk. Itt egy kört látunk egy vízszintes átmérővel és egy merőleges fél húrral. (A merőleges húrt az átmérő felezi.) A tétel azt állítja, hogy a félhúr hossza mértani közepe az átmérő két darabja hosszának. Ez a tény a Thálesz-tétel és hasonlóságok alapján könnyen igazolható.

Ha a függőleges húr azt a szerepet játsza, mint Dürer ábráján a függőleges, a kör pedig azt a kört, amelyik a Dürer ábráján a függőlegesnek megfelelő kör, akkor hol van az utóbbi ábránkon a függőleges húr? A $p : q$ arányt értelmezzük úgy, mint az $(1 - t) : (1 + t)$ arányt, ahol t tetszőleges valós szám, melyre $-1 \leq t \leq 1$! Ekkor az R sugarú kör bal oldali szélétől számítva a függőleges húr távolsága



nyilván ez:

$$\frac{1-t}{2}(R+r)$$

A vízszintes átmérő teljes hossza pedig ez:

$$2R - (1-t)(R-r)$$

Most kiszámítjuk az utóbbi ábrán látható sötétkék és világoskék átmérődarabok hosszát. A sötétkék átmérődarab hossza ez:

$$\frac{1-t}{2}(R+r) - \frac{1-t}{2}(R-r) = r(1-t)$$

Ugyanakkor a világoskék darab hossza ez:

$$2R - (1-t)(R-r) - r(1-t) = R(1+t)$$

Mindazonáltal a függőleges félhúr hossza mértani középként ez:

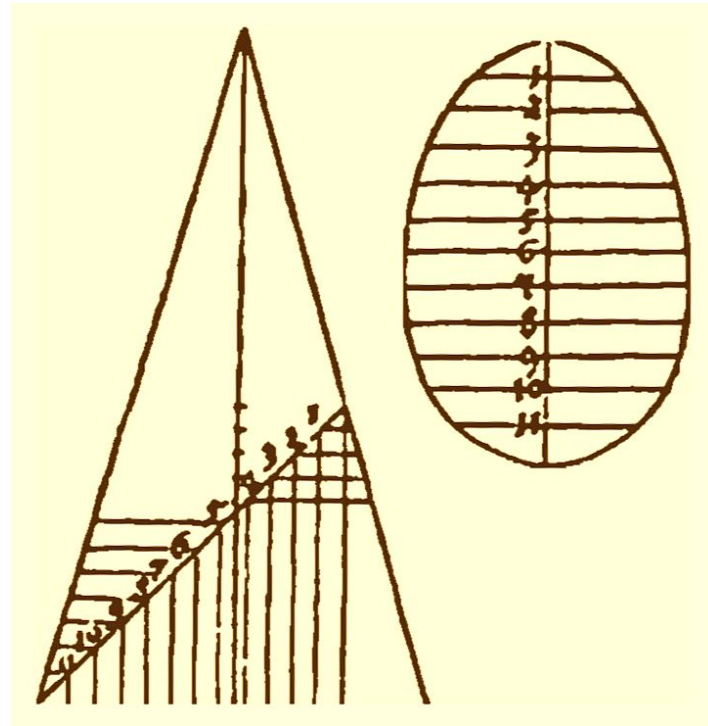
$$\sqrt{r(1-t)R(1+t)} = \sqrt{Rr(1-t^2)}$$

Láthatjuk, hogy a végeredmény nem változik, ha a $-t$ helyére $+t$ kerül. Megkaptuk tehát, hogy az ellipszis középpontosan is szimmetrikus, és a középpont a fent említett $R+r$ hosszúságú vízszintes szakasz felezőpontja.

Mellékeredményként kijött az is, hogy az ellipszis hosszabbik féltengelye R és r számtani közepe, kisebbik féltengelye pedig R és r mértani közepe.

Kimondhatjuk tehát azt a tételt, melyet már fél évezrede Dürer is megtalálhatott volna, ha nem vont volna le hamis következtetést a pontatlan szerkesztéséből:

Tétel. *Koncentrikus körök és egymással párhuzamos egyenesek révén definiálhatjuk az ellipszis vonalat úgy, hogy a körsugarak R értékről egyenletesen csökkennek a r értékig, a párhuzamos egyenesek pedig egyenletesen sorakoznak a R sugarú kör érintőjétől a r sugarú kört az ellenkező oldalon érintő egyenesig, és az egymásnak megfelelő körvonalak és egyenesek metszéspontjai szimmetrikusan az ellipszis két felét futják be. Az ellipszis hosszabbik féltengelye R és r számtani közepe, kisebbik féltengelye pedig R és r mértani közepe.*



A dolgozat végén megemlítjük, hogy Dürer ellipszis-konstrukciójának korrektsége könnyen kiolvasható Dürer eredeti ábrájából.

Hivatkozások

Magyar Wikipédia: Albrecht Dürer

Albrecht Dürer: Mérések körzővel és vonalzóval [latinul], Nürnberg, 1525.