Haladvány Kiadvány 2017.03.30

Reiman István egyik feladata a hetvenes évekből

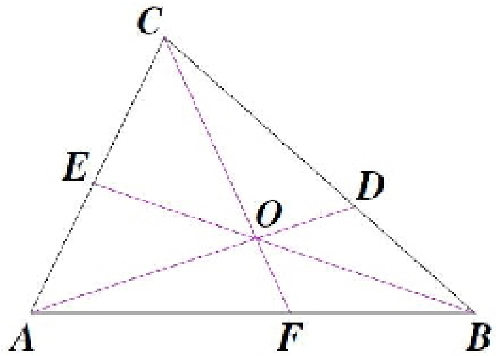
és a Ceva-tétel

.

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

.



Reiman István egyik feladata volt a hetvenes évekből, a nemzetközi diákolimpiai szakkörről a következő:

Legyen egy tetszőleges ABC háromszögben O egy tetszőleges belső pont, és az AO és BC egyenesek metszéspontja D, a BO és CA egyenesek metszéspontja E, a CO és AB egyenesek metszéspontja F. Legyen továbbá $\lambda = AO/OD$, $\mu = BO/OE$, $\nu = CO/OF$. Bizonyítandó, hogy $\lambda\mu\nu = 2 + \lambda + \mu + \nu$.

Bizonyítás. Az ABC háromszög területét vegyük 1 egységnek. Ekkor az ABO háromszög területe:

$$\frac{1}{1+\lambda}$$

Mindazonáltal megkapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{1+\nu}=1$$

Azzal leszünk készen, hogy

$$0=\frac{1}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{1+\nu}-1=\frac{2+\lambda+\mu+\nu-\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$

A fenti jelölésrendszerrel könnyen megfogalmazható az ismert Ceva-tétel egy egyszerű bizonyítása is. Az AD egyenes az A-nál lévő szöget kettévágja; a jobb oldali legyen α_1, a bal oldali α_2. Hasonlóan kapjuk a B és C pontoknál a β_1, β_2, γ_1,γ_2 szögeket; mindig a kisebb indexű van jobbra.

Ceva-tétel: *A* $\sin\alpha_j \sin\beta_j \sin\gamma_j$ *szorzat ugyanaz a szám* $j = 1$ *és* $j = 2$ *esetén.*

Bizonyítás: Jelölje a BC és AD egyenesek által bezárt szög szinuszát p. Hasonlóan kapjuk az E és F pontoknál lévő szöget szinuszára a q illetve r számokat. Az AFO háromszögre alkalmazva a szinusz-tételt azt kapjuk, hogy

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sin\alpha_1}{r}$$

Hasonlóan nyerjük az

$$\begin{aligned}\frac{OD}{OB} &= \frac{\sin\beta_1}{p}\\ \frac{OE}{OC} &= \frac{\sin\gamma_1}{q}\end{aligned}$$

összefüggéseket. Mármost

$$\frac{OF}{OA}\cdot\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OE}{OC}=\lambda\mu\nu$$

Tehát megkapjuk, hogy

$$\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1=\lambda\mu\nu pqr$$

A fenti egyenlőség jobb oldala nem változik, ha a fenti definíciókban a *bal* és *jobb* szavakat felcseréljük. A bal oldalon viszont az 1-es index 2-esre változik Ez teljessé teszi a bizonyítást.

A fenti két tétel kombinálásával megkapjuk a következőt:

Mind $j = 1$, *mind* $j = 2$ *esetén fennáll, hogy*

$$\frac{\sin\alpha_j \sin\beta_j \sin\gamma_j}{pqr} = 2 + \lambda + \mu + \nu$$