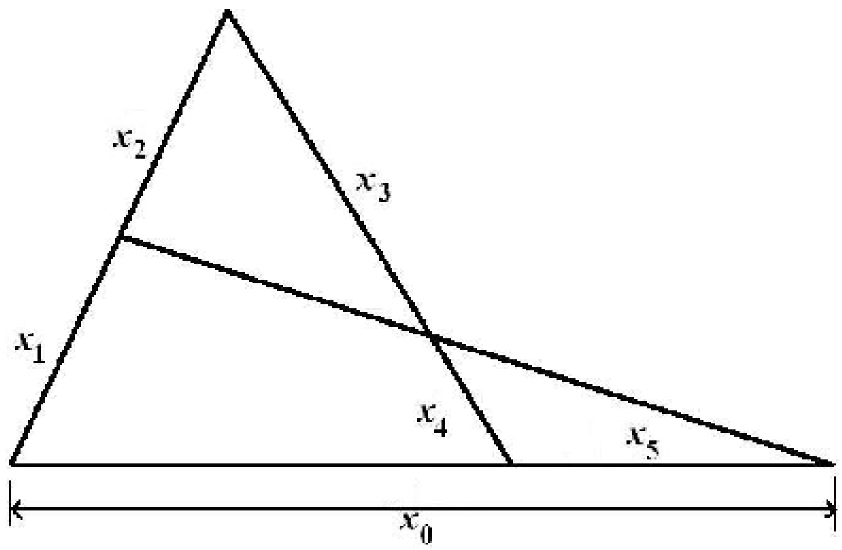
Haladvány Kiadvány 2017.04.15

A Menelaosz-tétel bizonyítása komplex számokkal

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Ajánlás: *Reiman István* (1927–2012) *tanár úr emlékére*



Menelaosz-tétel:

$$x_0 x_2 x_4 = x_1 x_3 x_5$$

Bizonyítás. A tételt komplex számok segítségével bizonyítjuk. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az ábrán a bal alsó csúcs az origó, és hogy az alsó vízszintes vonal a valós tengelyre esik. Mivel a Menelaosz-tétel állítása nem függ a távolságegység megválasztásától, feltehetjük, hogy $x_0 - x_5 = 1$. Ebből következően az ábrán a valós tengelyen látható közbülső osztópont 1, mint valós szám. Az ábrán a jobb alsó pont pedig x_0, mint komplex szám. Az ábrán a felső csúcsot, mint komplex számot jelölje z. Nyilván z nem valós.

Az x_1 és x_2 hosszúságú szakaszok közös pontja nyilván $\frac{x_1 z}{x_1+x_2}$, mint komplex szám. Hasonlóképpen az x_3 és x_4 hosszúságú szakaszok közös pontja $1+\frac{x_4(z-1)}{x_3+x_4}$, mint komplex szám. Tekintettel arra, hogy a $\frac{x_1 z}{x_1+x_2}$, $1+\frac{x_4(z-1)}{x_3+x_4}$ és x_0 komplex számok egy egyenesen vannak, valamely λ valós számra fennáll, hogy

$$1 + \frac{x_4(z-1)}{x_3+x_4} = \lambda \cdot \frac{x_1 z}{x_1+x_2} + (1-\lambda)x_0$$

Bevezetve az $x_2/x_1 = a$ és az $x_3/x_4 = b$ jelöléseket, a fenti egyenlőség így írható:

$$1 + \frac{z-1}{1+b} = \frac{\lambda z}{1+a} + (1-\lambda)x_0 \tag{1}$$

Ugyanakkor a bizonyítandó egyenlőség ezzé szelídül:

$$x_0 a = b(x_0 - 1)$$

azaz

$$x_0(b-a) = b \tag{2}$$

Mármost (1)-ben a z kivételével minden betű valós számot jelöl, z pedig nem valós. Ezért a két oldalon ugyanolyan együtthatója van z-nek. Ezt nyerjük tehát

(1)-ből:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+b} &= \frac{\lambda}{1+a}\\ 1+\frac{-1}{1+b} &= (1-\lambda)x_0\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenletet beszorozva $(b-a)$-val, bevezetve az $y = x_0(b-a)$ jelölést, és megoldva az egyenletrendszer λ-ra és y-ra ezeket kapjuk: $y = b, \lambda = \frac{a+1}{b+1}$. Megnyertük tehát a bizonyítandó (2) egyenlőséget.