Haladvány Kiadvány 2017.04.21

A hetedik te magad légy

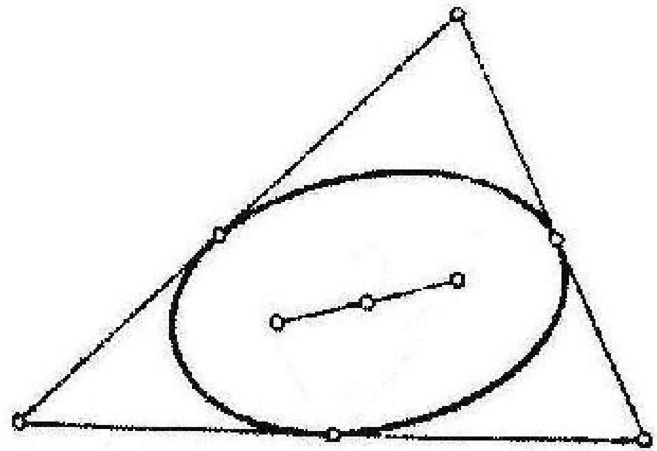
Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Ajánlás: *Morris Marden* (1905–1991) *emlékére*

Mindenekelőtt megmagyarázzuk a dolgozatunk címét. *Morris Marden* hetedik gyermekként született. Akkor vált világhírű matematikussá, amikor a zérushelyek geometriájáról szóló könyvét megjelentette (*The Geometry of the Zeros*, 1949). Ezt a könyvet később kibővítette (*The Geometry of Polynomials*, 1966). Megemlítjük még, hogy Marden egyik Ph.D.-hallgatója *Vermes Róbert* volt (1963), aki folytatta Marden kutatásait.

Marden legismertebb eredménye a következő: Tekintsünk a komplex számsíkon egy háromszöget, és jelöljön $p(z)$ egy olyan harmadfokú polinomot, melynek a három gyöke az adott háromszög három csúcsa. Az könnyen látható, hogy a második derivált, azaz $p''(z)$ egyetlen gyöke éppen a háromszög súlypontja. Sokkal érdekesebb ennél, hogy hol van az első derivált, azaz $p'(z)$ két gyöke. Azt már *Gauss* és *Lucas* híres eredményéből is lehet tudni, hogy ezt a két gyököt a háromszög belsejében kell keresni, és az is nyilvánvaló, hogy a két gyök meghatározta szakasz felezőpontja a háromszög súlypontja. Az viszont már sokkal érdekesebb, hogy a két gyökhöz mért távolságok összegét tekintve a háromszög kerületén



a legközelebbi pontok éppen az oldalak felezőpontjai. Másképpen fogalmazva: van egy olyan *ellipszis*, melynek *fókuszai* éppen $p'(z)$ *gyökeivel azonosak*, és az ellipszis mindhárom oldalt belülről érinti, mindhárom oldalt éppen annak a középontjában.

A tétel bizonyítása magyar nyelven elolvasható *Reiman István* könyvéből, melyet a hivatkozások között felsorolunk.

Ebben a dolgozatban ennek a tételnek egy rokonát vizsgáljuk. Most is kiindulunk egy háromszögből a komplex számsíkon, de most nem egy harmadfokú, hanem egy negyedfokú polinomot tekintünk: Legyen $q(z)$ egy olyan negyedfokú polinom, melynek gyökei a háromszög csúcsai, de az egyik csúcs kétszeres gyökként. Most is megvizsgáljuk $q'(z)$ gyökeit. Multiplicitással számolva tehát $4 + 3 = 7$ gyökről van szó. Az világos, hogy $q'(z)$ egyik gyöke a három közül megegyezik a $q(z)$ polinom kétszeres gyökével. A másik kettő helyzete kérdéses tehát a háromszög belsejében.

Leszűkítjük figyelmünket az olyan háromszögekre, melyek egyenlő szárúak, és amelyeknél éppen a szárak metszéspontja a kétszeres gyöke $q(z)$-nek.

Tétel. *A $q'(z)$ polynom minden gyökére igaz az, hogy vagy a háromszögnek a szimmetriatengelyére esik, vagy pedig az a hosszúságú alap felezőpontjától $a/\sqrt{8}$*

távolságra van a háromszög belsejében, sőt az utóbbi esetben az ilyen gyöknek a szimmetriatengelyre való tükörképe is gyök, továbbá ezen két gyök számtani közepe a szimmetriatengelynek az alaphoz közelebbi negyedelőpontja.

A tétel állításában az a legmeglepőbb, hogy nem függ a szimmetriatengely hosszától a nem szimmetriatengelyi gyököknek a szimmetriatengely egyik végpontjától mért távolsága.

Nézzünk egy konkrét példát: A háromszög három csúcsa legyen például $8i$, $8-8i$, $12+4i$. Ezek egyenő szárú háromszöget alkotnak, hiszen

$$\begin{aligned} (12+4i)-(8i) &= 12-4i \\ |12-4i| &= \sqrt{(12-4i)\,(12+4i)} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(12+4i)-(8-8i) &= 4+12i \\
|4+12i| &= \sqrt{(4+12i)\,(4-12i)} = 4\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

Most az alap felezőpontja:

$$
\frac{(8i)+(8-8i)}{2} = 4
$$

Mármost

$$
\begin{aligned}
q(z) &= ((z-(8i))\,(z-(8-8i))(z-(12+4i))^2 \\
&= z^4-(32+8i)\,z^3+(384+224i)\,z^2 \\
&\quad -(2048+2816i)\,z+(2048+14\,336i)
\end{aligned}
$$

$$
q'(z) = 4z^3-(96+24i)\,z^2+(768+448i)\,z-(2048+2816i)
$$

Ez utóbbi polinom gyökei: $12+4i$, $6+i+w$, $6+i-w$, ahol $w=\sqrt{-21-28i}=$

$2.6458 - 5.2915i$. Itt nyilván $3+i$ rajt van a szimmetriatengelyen. Másrészt

$$\frac{(6+i+w)+(6+i-w)}{2} = 6+i$$

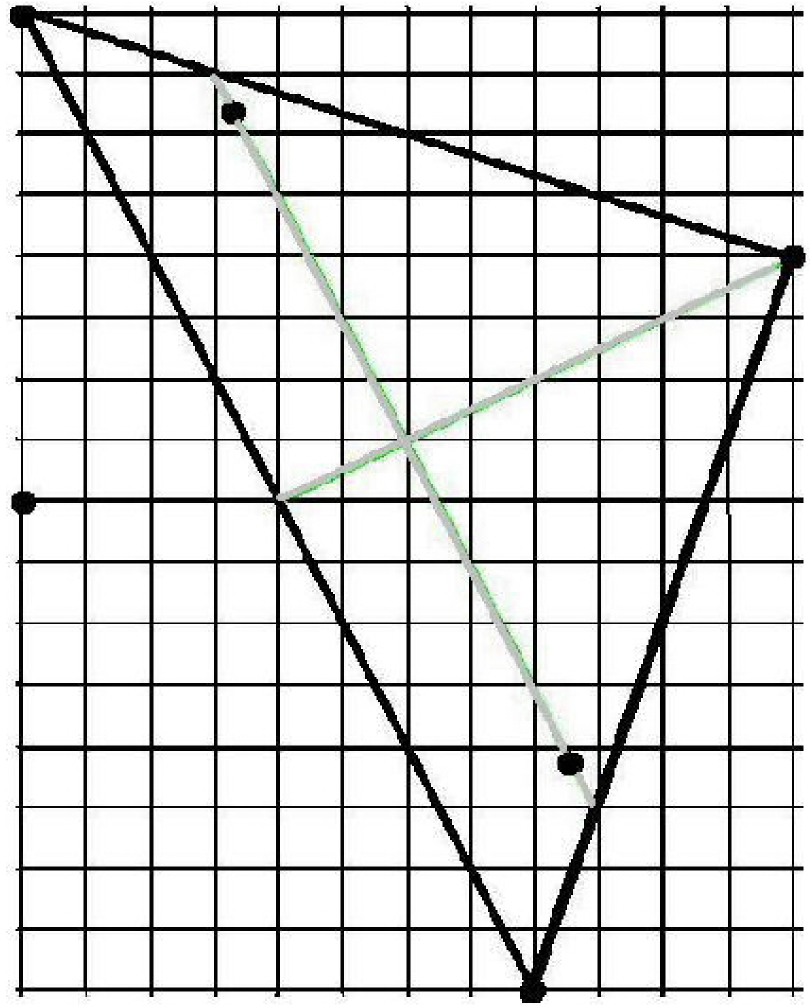
és ez a pont is rajta van a szimmetriatengelyen negyedelőpontként, hiszen

$$\frac{(6+i)-4}{(12+4i)-4} = \frac{1}{4}$$

Igaz továbbá még az is, hogy $6+i+w$ és $6+i-w$ egymás tükörképei a szimmetriatengelyre, mert

$$\frac{(6+i+w)-(6+i-w)}{(12+4i)-4} = \frac{(2-i)w}{10} = \frac{\sqrt{(2-i)^2(-21-28i)}}{10} = \sqrt{\frac{7}{4}}i$$

tehát tisztán képzetes.



Megjegyezzük még, hogy

$$w = \sqrt{-21 - 28i} \approx 2.6458 - 5.2915i$$

Mindazonáltal a $q'(z)$ polinomnak a háromszög belsejébe eső gyökei:

$$\begin{aligned} 6 + i + w &\approx 8.6458 - 4.2915i \\ 6 + i - w &\approx 3.3542 + 6.2915i \end{aligned}$$

Bizonyítás: Reiman István nyomán alkalmazni fogjuk azt a felismerést, hogy a síkon bárhol is vesszük fel a $0, 1, i$ komplex számoknak megfelelő derékszögű háromszöget, ez nem befolyásolja $q'(z)$ gyökeinek helyzetét, feltéve, hogy $q(z)$ gyökei már rögzítettek. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük tehát, hogy az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye a valós tengely, a $q(z)$ kétszeres gyöke a 4 számnál van, az egyszeres gyökök pedig $+\sqrt{2}hi$ és $-\sqrt{2}hi$ valamely alkalmas $h > 0$ számra. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} q(z) &= (z-\sqrt{2}hi)(z+\sqrt{2}hi)(z-4)^2 \\ &= z^4 - 8z^3 + \left(2h^2+16\right)z^2 - 16h^2z + 32h^2 \\ q'(z) &= 4z^3 - 24z^2 + \left(4h^2+32\right)z - 16h^2 \end{aligned}$$

Ennek gyökei: 4, $1-\sqrt{1-h^2}$, $1+\sqrt{1-h^2}$. Tehát ha $h \leq 1$, akkor a gyökök mind a szimmetriatengelyen vannak. Ha pedig $h > 1$, akkor a két nem valós gyök számtani közepe éppen 1, azaz a szimmetriatengely negyedelőpontja. Másrészt a két nem valós gyök szorzata ez:

$$\left(1-\sqrt{1-h^2}\right)\left(1+\sqrt{1-h^2}\right) = h^2$$

Tehát a két nem valós gyöknek az abszolút értéke éppen h. Az alap hossza pedig $a = 2\sqrt{2}h = \sqrt{8}h$.

Azt kell még megmutatnunk, hogy a tekintett két gyök valóban a háromszög belsejébe esik. Hivatkozhatnánk Gauss és Lucas említett tételére is, de inkább közvetlenül bizonyítjuk. Mivel a két gyök összekötő egyenese merőleges a szimmetriatengelyre, és a negyedelőponton meg át, azért az egyenesnek a háromszögbe eső darabjának hossza a párhuzamos szelők tétele miatt:

$$\frac{3}{4} \cdot (2\sqrt{2}h) = \frac{3}{\sqrt{2}}h$$

Ugyanakkor a két tekintett gyök távolsága:

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 - \sqrt{1-h^2}\right) - \left(1 + \sqrt{1-h^2}\right) \right| \\ = \; & \left| -2\sqrt{1-h^2} \right| = \left| 2\sqrt{h^2-1}i \right| = 2\sqrt{h^2-1} \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{3}{\sqrt{2}}h - 2\sqrt{h^2 - 1}$$

minimuma változó h esetére a $h = 3$ értéknél van, ezért

$$\frac{3}{\sqrt{2}}h - 2\sqrt{h^2 - 1} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 3 - 2\sqrt{3^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Hivatkozások

Marden, Morris: A note on the zeroes of the sections of a partial fraction, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 935–940.

Marden, Morris: *The geometry of a polynomial in a complex variable,* Math. Surveys, Amer. Math. Soc., 1949.

Marden, Morris: *Geometry of polynomials*, Math. Surveys, Amer. Math. Soc., 1966.

Reiman István: *A geometria határterületei*, Budapest, 1986.