Haladvány Kiadvány 2017.05.10

Lambert tétele

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Hajós híres könyvének egyik tétele szerint az $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ pontok alkotta háromszög köré írható kör egyenlete:

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Ismeretes, hogy minden parabola hasonló ahhoz a parabolához, melynek egyenlete:

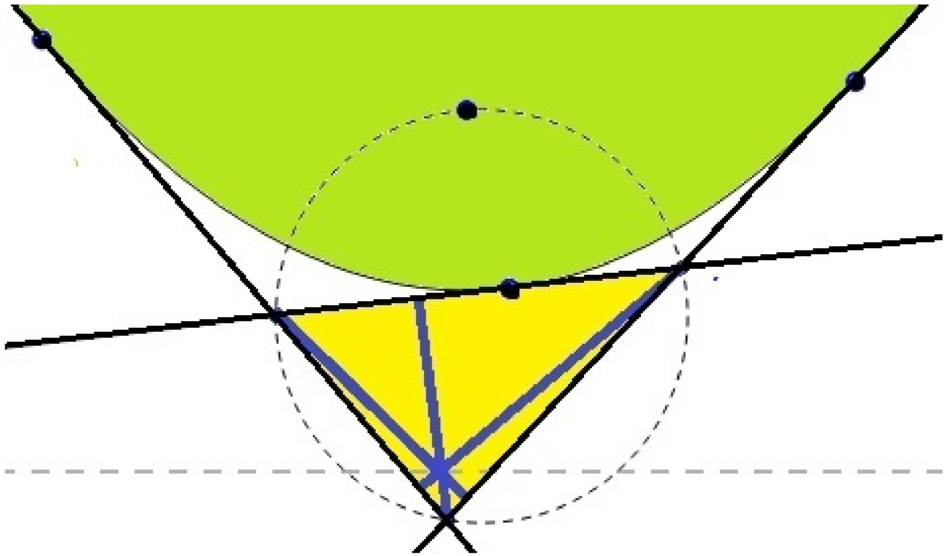
$$y = x^2$$

Ennek a parabolának az $(a; a^2)$ pontjához húzott érintő egyenlete:

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

A parabola fókusza a $(0; \frac{1}{4})$ pont.

Most $a > b > c$ esetén tekintsük a parabolához az $(a; a^2)$, $(b; b^2)$, $(c; c^2)$ pontokban húzott három érintő által meghatározott háromszög köré írható kör egyenletét. A fentiek alapján ezt meg fogjuk határozni. Utána megmutatjuk majd, hogy ez a kör átmegy a fókuszon. Ez a tény *Lambert tétele* néven ismeretes. (Lambert német matematikus, csillagász, fizikus és filozófus volt, 1728-től 1777-ig élt.)



Először meghatározzuk az $(a; a^2)$, $(b; b^2)$ pontokban húzott érintők metszéspontját:

$$y - a^2 = 2a(x - a) \qquad y - b^2 = 2b(x - b) \tag{1}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk az $(x_3; y_3)$ metszéspontra, hogy

$$x_3 = \frac{a + b}{2} \qquad y_3 = ab$$

Szemléletesen fogalmazva: a metszéspont a és b számtani közepénél, mint x-koordinátánál van, és éppen olyan magasságban, mint az a és b x-koordinátáknál tekintett parabolapontok magasságának mértani közepe.

Hasonló módon megkaphatjuk a három érintő által alkotott háromszög további két csúcsát is. A fentiek szerint a kör egyenlete:

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ \frac{(b+c)^2}{4}+b^2c^2 & \frac{b+c}{2} & bc & 1 \\ \frac{(c+a)^2}{4}+c^2a^2 & \frac{c+a}{2} & ca & 1 \\ \frac{(a+b)^2}{4}+a^2b^2 & \frac{a+b}{2} & ab & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Ezt az egyenletet 64-gyel megszorozva ezt kapjuk:

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (b+c)^2+4b^2c^2 & 2(b+c) & 4bc & 4 \\ (c+a)^2+4c^2a^2 & 2(c+a) & 4ca & 4 \\ (a+b)^2+4a^2b^2 & 2(a+b) & 4ab & 4 \end{bmatrix} = 0$$

Ezt az egyenletet leosztva a

$$32\,(a-b)\,(a-c)\,(b-c)$$

szorzattal végül a következő egyenletet nyerjük:

$$x^2+y^2+\frac{4abc-(a+b+c)}{2}x-\left(ab+bc+ca+\frac{1}{4}\right)y+\frac{ab+bc+ca}{4}=0$$

Ha ennek a körnek a középpontja $(u;v)$, akkor már láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} u &= \frac{a+b+c}{4}-abc \\ v &= \frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{1}{8} \end{aligned}$$

A kör sugara négyzetére pedig ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a+b+c}{4}-abc\right)^2+\left(\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{ab+bc+ca}{4} \\ = &\ \frac{\left(1+4a^2\right)\left(1+4b^2\right)\left(1+4c^2\right)}{64} \end{aligned}$$

Mindazonáltal a fókusz is rajt van a körön, hiszen kielégíti a kör egyenletét:

$$0^2+\frac{1}{4^2}+\frac{4abc-(a+b+c)}{2}\cdot 0-\left(ab+bc+ca+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{ab+bc+ca}{4}=0$$

Ezzel Lambert tétele bizonyítást nyert.

Ha már kiszámoltunk a fenti szép képleteket, nézzük meg azt a speciális esetet, amikor az érintők által alkotott háromszög derékszögű. Tegyük fel, hogy a derékszög az $(x_3; y_3)$ metszéspontnál van. Ekkor tehát az (1)-beli egyenesek merőlegesek, azaz $(2a)(2b)=-1$. Ebből rögtön látszik, hogy $y_3=ab=\frac{-1}{4}$. Mivel a parabola vezéregyenesének egyenlete $y=\frac{-1}{4}$, ezért megkaptuk, hogy a parabola merőleges érintői a vezéregyenesen metszik egymást.

Most nézzük meg az általános esetet. Tekinteni fogjuk az érintők háromszögének magasságpontját. Mivel az $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ pontokat összekötő egyenes egyenlete

$$y - c^2 = 2c(x - c)$$

ezért az $(x_3; y_3)$ pontból induló magasságvonal egyenlete:

$$y - y_3 = \frac{-1}{2c}(x - x_3)$$

azaz

$$y - ab = \frac{-1}{2c}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

Hasonlóképpen egy másik magasságvonal egyenlete:

$$y - bc = \frac{-1}{2a}\left(x - \frac{b+c}{2}\right)$$

Most megoldva az

$$\begin{aligned} y - ab &= \frac{-1}{2c}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \\ y - bc &= \frac{-1}{2a}\left(x - \frac{b+c}{2}\right) \end{aligned}$$

egyenletrendszert azt kapjuk, hogy a (k, ℓ) magasságpontra

$$\begin{aligned} k &= \frac{a+b+c}{2} + 2abc \\ \ell &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

Tehát a magasságpont is rajt van a vezéregyenesen.

Meg kell említenünk, hogy a fenti bizonyítás nem működik, ha történetesen $ac = 0$. De az $a = 0$ esetben az a szám helyett a b számot tekinthetjük, a $c = 0$ esetben pedig a c szám helyett a b számot.

Hivatkozások

Hajós György, Bevezetés a geometriába, Budapest, 1971.