Haladvány Kiadvány 2017.10.13

Péntek tizenhárom, négyzetszámok és háromszögszámok

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Ajánlás: Mindazoknak, akik tizenharmadikán ünneplik a névnapjukat vagy a születésnapjukat.

Köszönetnyilvánítás: Hálával tartozunk *László Lajos, G. Horváth Ákos*, továbbá *Kánnai Zoltán* kollégáknak értékes hozzászólásaikért.

A jelen munka abból az indíttatásból készült, hogy 2017. október 13. péntekre esik, a péntek szavunk (szláv eredetű lévén) az ötös számra utal, az október szavunk (latin eredetű lévén) a nyolcas számra, márpedig az 5, 8, 13 számok Fibonacci-számok. Ugyanakkor október a mai naptárunkban a tizedik hónap, és 10 egy háromszögszám, mégpedig olyan, melynek a sorszáma egy négyzetszám, mivel $1+2+3+4=10$. Tekintettel arra, hogy $\frac{10}{8 \cdot 8} = \frac{10}{5 \cdot 13 - 1} = \frac{5}{32}$, ötletet nyertünk a következő feladványhoz:

Feladvány: Legyen

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Bizonyítandó, hogy minden pozitív egész n esetén F^n-nek a főátlójában olyan számok vannak, melyek p_n szorzatára fennáll, hogy

$$\frac{5p_n - 5}{32}$$

egy háromszögszám, azaz $\frac{m(m+1)}{2}$ alakú valamely pozitív egész m-re.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} 165\,580\,141 & 267\,914\,296 \\ 267\,914\,296 & 433\,494\,437 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 165\,580\,141 \cdot 433\,494\,437 - 5}{32} &= 11\,215\,323\,437\,683\,690 \\ &= \frac{149\,768\,644 \cdot 149\,768\,645}{2} \end{aligned}$$

Az alábbiakban megadjuk a megfejtést, sőt további érdekességek is kiderülnek.

Kiindulunk két mátrixszorzási azonosságból:

$$\begin{bmatrix} 5+\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 5-\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9-4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 9+4\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5+\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 5-\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Ezért

$$F^n = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & \sqrt{5}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(9-4\sqrt{5}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(9+4\sqrt{5}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5+\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 5-\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Tehát ha

$$\sqrt{5}F^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{bmatrix}$$

akkor

$$b_n = \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n$$

Itt érdemes megállni egy pillanatra! A b_n számoknak ugyanis közük van a Fibonacci-számokhoz. Jelölje f_k az k indexű Fibonacci-számot. Az ismert Binet-formula szerint:

$$\sqrt{5}f_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Márpedig

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = 9+4\sqrt{5} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6 = 9-4\sqrt{5}$$

Tehát

$$b_n = \sqrt{5} f_{6n}$$

Mivel F determinánsa 1, ezért $\sqrt{5}F^n$ determinánsa 5; következésképpen $a_n c_n = 5 + b_n^2$. Másrészt $a_n c_n = 5 p_n$.

Kitérésképpen megemlítjük — bár ezeket a tényeket nem fogjuk felhasználni —, hogy a fenti mátrixszorzásokból érdemes észrevenni még azt is, hogy

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{5} f_{6n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^n \\
c_n &= \sqrt{5} f_{6n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^n
\end{aligned}
$$

Térjünk vissza az eredeti feladványhoz! Tehát ilyen pozitív m_n-et keresünk:

$$\frac{b_n^2}{32} = \frac{5p_n - 5}{32} = \frac{m_n(m_n+1)}{2}$$

Azt kapjuk másodfokú egyenlet megoldásaként, hogy $4m_n + 2 = \sqrt{b_n^2 + 4}$.

Ármost

$$
\begin{aligned}
b_n^2+4 &= \left((9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n\right)^2+4\\
&= 4+\ (9+4\sqrt{5})^{2n}+(9-4\sqrt{5})^{2n}-2+4\\
&= (9+4\sqrt{5})^{2n}+(9-4\sqrt{5})^{2n}+2\\
&= \left((9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n\right)^2
\end{aligned}
$$

Tehát

$$4m_n+2=\left(9+4\sqrt{5}\right)^n+\left(9-4\sqrt{5}\right)^n$$

Itt m_n egész szám, mert egyrészt $m_0 = 0$, $m_1 = 4$, másrészt

$$\begin{aligned}
& (4m_{n+2} + 2) - 18(4m_{n+1} + 2) \\
= & \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^{n+2} + \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^{n+2} \\
& - \left(9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5}\right)\left((9 + 4\sqrt{5})^{n+1} + (9 - 4\sqrt{5})^{n+1}\right) \\
= & -\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^{n} - \left(9 - 4\sqrt{5}\right)^{n} = -4m_n - 2
\end{aligned}$$

azaz

$$m_{n+2} = 18m_{n+1} - m_n + 8$$

Mindazonáltal nem csak az derült ki, hogy m_n egész, hanem még az is, hogy osztható 4-gyel. A következő táblázat mutatja az $m_n/4$ számokat prímtényezők szorzatára bontva:

n	1	2	3	4	5	6	7
$m_n/4$	1^2	$5 \cdot 2^2$	$2^2 3^2$	$5 \cdot 2^4 3^4$	$11^2 31^2$	$5 \cdot 2^2 17^2 19^2$	$29^2 211^2$

Azt látjuk, hogy páratlan n esetén ezek négyzetszámok, páros n esetén pedig négyzetszámok 20-szorosai. Az utóbbi esetben tekintsük az f_{3n} Fibonacci-számot. A fentiek alapján hamar megkapjuk, hogy páros n esetén esetén

$$\frac{m_n}{80} = \left(\frac{f_{3n}}{8}\right)^2$$

Itt a jobb oldalon látható $f_0/8$, $f_6/8$, $f_{12}/8$, $f_{18}/8$, ... sorozat, azaz a 0, 1, 18, 323, 5796, 104005, 1866 294, ... sorozat jól ismert: `https://oeis.org/A049660`

.

Most tekintsük $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ esetén esetén az

$$\begin{aligned} m_{2k+2} &= 18m_{2k+1} - m_{2k} + 8 \\ \frac{m_{2k}}{80} &= \left(\frac{f_{6k}}{8}\right)^2 \\ \frac{m_{2k+2}}{80} &= \left(\frac{f_{6k+6}}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaként nyert

$$\frac{m_{2k+1}}{4} = \frac{5f_{6k}^2 + 5f_{6k+6}^2}{288} - \frac{1}{9}$$

számokat. Most megmutatjuk, hogy ezek is négyzetszámok, ráadásul páratlanok. (A fentiekben már láttuk, hogy egész számok.)

Állítjuk, hogy minden pozitív egész k-ra fennáll

$$\left(f_{6k+2} - \frac{f_{6k}}{4}\right)^2 = \frac{5f_{6k}^2 + 5f_{6k+6}^2}{288} - \frac{1}{9}$$

Kiindulunk abból, hogy $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ esetén a Binet-formula szerint

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5} f_{6k+m} \\
= \quad & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{6k+m} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{6k+m} \\
= \quad & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m} \left(9+4\sqrt{5}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m} \left(9-4\sqrt{5}\right)^k
\end{aligned}$$

Mármost

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

miatt

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5} f_{6k+2} - \frac{\sqrt{5} f_{6k}}{4} \\
= \quad & \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^k - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^k \\
= \quad & \frac{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^k - \left(5-2\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^k}{4}
\end{aligned}$$

Tehát

$$f_{6k+2} - \frac{f_{6k}}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^k - \left(\sqrt{5}-2\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^k}{4}$$

Ebből

$$\begin{aligned}\left(f_{6k+2} - \frac{f_{6k}}{4}\right)^2 &= \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k} + \left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k} - 2}{16} \\ &= \frac{\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+1} + \left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+1} - 2}{16}\end{aligned}$$

Másrészt

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = 9+4\sqrt{5} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6 = 9-4\sqrt{5}$$

miatt

$$\begin{aligned}
5f_{6k}^2+5f_{6k+6}^2 &= \left(\left(9+4\sqrt{5}\right)^k-\left(9-4\sqrt{5}\right)^k\right)^2 \\
&\quad +\left(\left(9+4\sqrt{5}\right)^{k+1}-\left(9-4\sqrt{5}\right)^{k+1}\right)^2 \\
&= \left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k}+\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k}-2 \\
&\quad +\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+2}+\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+2}-2 \\
&= -\left(1+(9+4\sqrt{5})^2\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k} \\
&\quad +\left(1+(9-4\sqrt{5})^2\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k}-4 \\
&= \left(162+72\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k} \\
&\quad +\left(162-72\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k}-4 \\
&= 18\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+1}+18\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+1}-4
\end{aligned}$$

Mindazonáltal

$$
\begin{aligned}
&\frac{5f_{6k}^2 + 5f_{6k+6}^2}{288} - \frac{1}{9} \\
= \quad &\frac{18\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+1} + 18\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+1} - 4}{288} - \frac{1}{9} \\
= \quad &\frac{\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+1} + \left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+1} - 2}{16}
\end{aligned}
$$

Annak meggondolására, hogy a fenti négyzetszámok valóban páratlanok, elegendő azt észrevenni, hogy

$$\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2k+1} + \left(9-4\sqrt{5}\right)^{2k+1}$$

maradéka 32-vel osztva 18; ez a tény hamar látható a binomiális tétel alapján.

Bizonyítottuk tehát, hogy nem csak az igaz, hogy az F mátrix hatványainak főátlójában az elemek szorzata szoros kapcsolatban van a háromszögszámokkal, hanem azt is, hogy ezen háromszögszámok sorszáma szoros kapcsolatban van a négyzetszámokkal.