A Szögfelező és a Replusz Nomogram

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

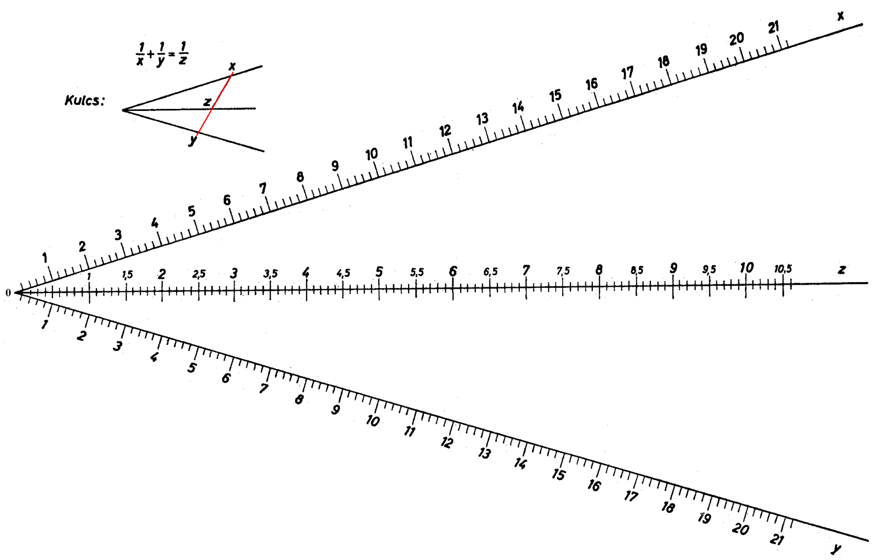
2017.12.27.

Haladvány Kiadvány, http://math.bme.hu/~hujter/171227.pdf

Egy ősrégi középiskolai tankönyvben [0] és a Wikipédiban [2], [3] is megtalálhatjuk az alábbi számolóábrát (**nomogramot**) az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \tag{1}$$

replusz[1)] számításokhoz:



1) reciprok plusz = reciprokok összege

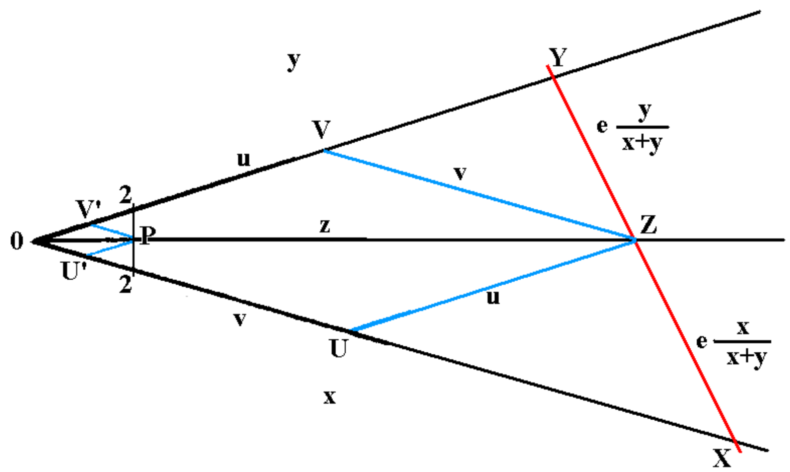
Ha x , y és z közül (bármelyik) kettő értéke ismert, akkor e kettő tengelyén a megfelelő számokhoz illesztett egyenes vonalzó a harmadik tengelyen azonnal megmutatja a harmadik változó megfelelő értékét. Az (1) összefüggést nagyon sok helyen használják, elsősorban fizikában (optika, elektronika, stb.). Mivel *analóg* számoló eszköz, ezért könnyen és szemléletesen látható, hogy egyik vagy másik mennyiség változtatásakor a többi mennyiség hogyan változik.

Elkészítése sem nehezebb mint használata: a z tengely legyen szögfelezője az x és y tengelyeknek, és a beosztásának egysége legyen kétszer akkora, mint az x és y tengelyeken.

De hogyan (miért) működik ez az egyszerű ábra? Ez gyerekkoromban sokáig nem hagyott nyugodni, amíg a *szögfelezőről* nem tanultunk (lásd pl. [1]). Alább leírom röviden ezt a bizonyítást.

Házi feladat annak megvizsgálása, ha a z tengely *nem* szögfelezője az x és y tengelyeknek, és a három egyenesen tetszőleges egységekkel írunk egyenlő közű (ekvidisztans) skálákat, akkor milyen összefüggés lesz az egyenes vonalzó által megjelölt három szám között?

A Replusz nomogram működésének bizonyítása



Tehát $\mathbf{Y0X}$ tetszőleges szög, $\mathbf{0Z}$ *szögfelező egyenes*, és az $\mathbf{0Z}$ szögfelező szakasz hosszát kell kiszámolnuk, ha $\mathbf{0X} = x$ és $\mathbf{0Y} = y$.

A szögfelező tétel szerint $\mathbf{YZ} = \mathbf{e}\cdot\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$ és $\mathbf{XZ} = \mathbf{e}\cdot\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$ ahol $\mathbf{XY} = \mathbf{e}$.

Legyen $\mathbf{ZV} \parallel \mathbf{0X}$ és $\mathbf{ZU} \parallel \mathbf{0Y}$. Az $\mathbf{0UZV}$ paralelogrammában az $\mathbf{0Z}$ átló szögfelező, ezért $\mathbf{0UZV}$ rombusz és $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A párhuzamos szelők tételét az $\mathbf{X}$ csúcsra felírjuk: $\mathbf{UZ}\ /\ \mathbf{0Y} = \mathbf{XZ}\ /\ \mathbf{XY}$

azaz $\mathbf{u}\ /\ \mathbf{y} = \mathbf{e}\cdot\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\ /\ \mathbf{e}$ ahonnan $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{xy}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$

vagy másképpen $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}$.

Hasonlóan $\mathbf{PU'} = \mathbf{PV'} = \dfrac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}}{\mathbf{2}+\mathbf{2}} = \mathbf{1}$.

Mivel $\mathbf{02P\Delta} \sim \mathbf{0VZ\Delta}$, ezért $\mathbf{0Z}\ /\ \mathbf{0P} = \mathbf{ZV}\ /\ \mathbf{PV'}$ ahonnan $\mathbf{0Z} = \mathbf{OP}\cdot\mathbf{ZV} = \dfrac{\mathbf{xy}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$. Tehát, ha az $\mathbf{0Z}$ félegyenesen $\mathbf{0P}$ -t választjuk egységnek, akkor *bármely* $\mathbf{XY}$ egyenes esetén

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0Z}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0X}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0Y}} \tag{2}$$

(mellesleg $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{0P}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$ is teljesül). □

Hivatkozások

[**0**] *Függvénytáblázatok, matematikai és fizikai összefüggések,* Tankönyvkiadó, 1968.

[**1**] *Geometriai feladatok gyűjteménye I*, Tankönyvkiadó, 19xx.

[**2**] https://hu.wikipedia.org/wiki/**Nomogram** ,

[**3**] https://hu.wikipedia.org/wiki/Nomogram#/media/File:**Nomogramparallelresistance**.svg