# A másod- és harmadfokú egyenletek nomogramjai

Bálint Roland és Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
balint.roland@virt.uni-pannon.hu,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2017.12.28.

**Kivonat**

A másodfokú egyenletet megoldó számolóábra elemzésekor érdekes összefüggéseket találtunk a másodfokú egyenlet és a koordinátarendszer kapcsolatáról, amik alapján megszerkesztettük a harmadfokú egyenlet nomogramját.

Haladvány Kiadvány, http://math.bme.hu/~hujter/171228.pdf , 18.01.09,16:05

## 0. Bevezetés

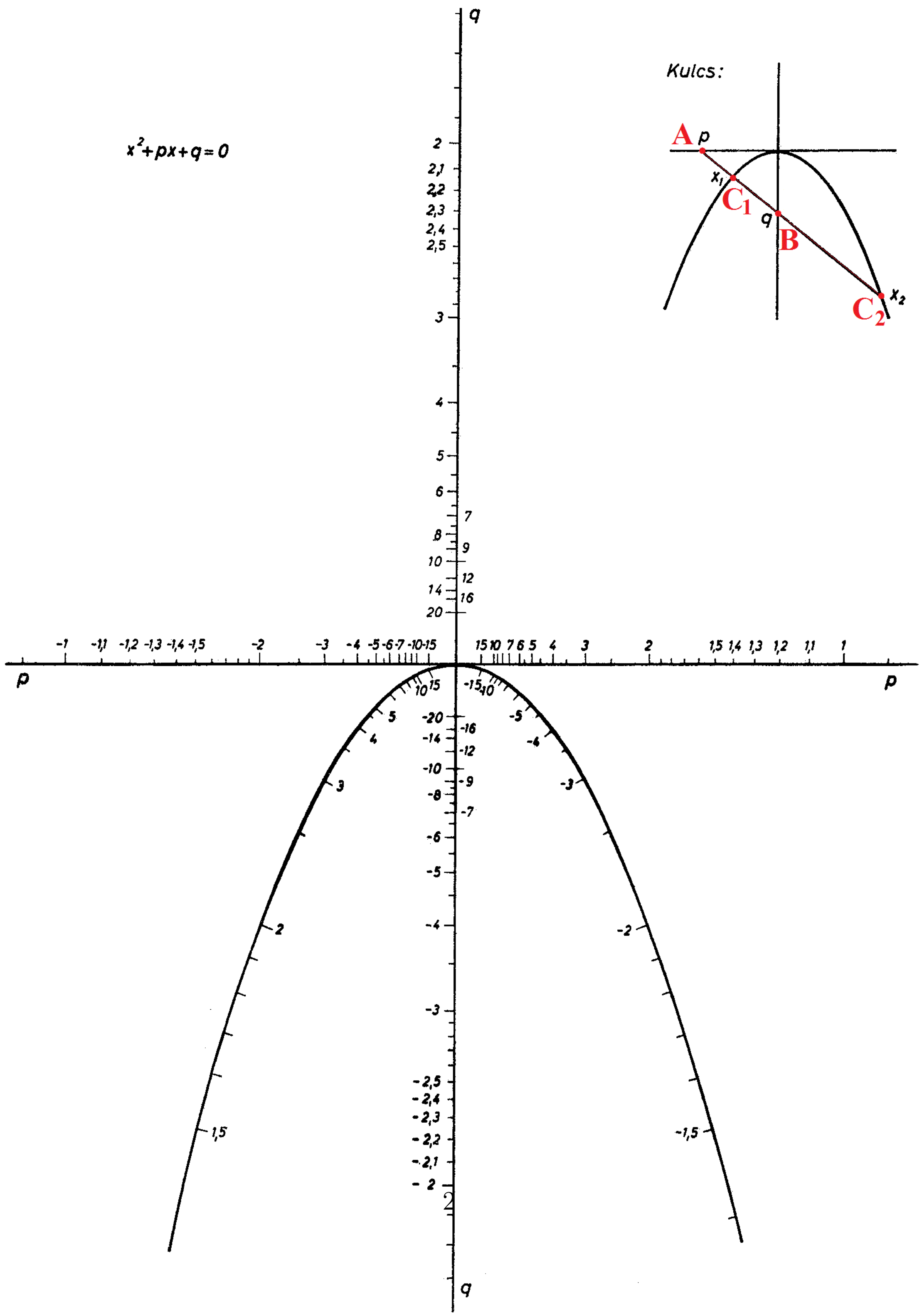
Egy régi középiskolai "Függvénytáblázatok" könyvben ([**0**]) találtuk az alábbi számolóábrát ("**nomogram**"): egy vonalzót a vízszintes és függőleges tengelyek $p$ -nek és $q$ -nak megfelelő pontokra illesztve azonnal leolvashatjuk a

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{1}$$

másodfokú egyenlet gyökeit[1)] a skálázott parabolán.

[1)] Az $x$ és $y$ változókat a tengelyek eredeti elnevezéseinek tartjuk fenn, ezért mi inkább a $z^2 + pz + q = 0$ egyenlet $z_1, z_2$ gyökeiről beszélünk.

532. Számítóábra az $x^2+px+q=0$ másodfokú egyenlet megoldásához .



Honlapunkon [12] közlünk még néhány üres, megvonalazott, nagyfelbontású számolóábrát az Olvasóknak, használják egészséggel!

Használata egyszerű és gyors, sőt az *analóg számolóeszközök* előnyeit is "élvezhetjük": $p$ és/vagy $q$ változtatása esetén azonnal látjuk a gyökök változásának irányát és mértékét. Ez a gyökképletből másodfokú egyenlet esetében [3] még megy csak-csak, de harmad- és negyedfokú egyenletek esetében ((43),[6]) már aligha. A műszaki tudományokban és gyakorlatban most is használnak számolóábrákat (például *Nyquist* diagram [8],[11]).

De hogyan működik? Miért metszik az egyenesek épp a gyököknél a görbét, ami miért parabola, stb. Ezekre a kérdésekre adott elemzéseket és érdekes felfedezéseket mutatjuk be az Olvasónak (követnie és átugornia is lehet). Az interneten erről semmit, még a fenti számolóábrát sem találtuk, csak az [1] és [2] nomogramokat, amik kicsit más elven működnek. Az alapos elemzések végén *felfedeztük* és megszerkesztettük a harmadfokú egyenletet megoldó ábrát is!

Érdekességképpen kiemeljük, hogy sem a másodfokú sem a harmadfokú számolóábra elemzéséhez és elkészítéséhez egyszer sem volt szükségünk a megoldóképletekre, sőt a Viète formulákat ((9), (41), (42), [5]) is csak ellenőrzéshez használtuk!

# 1. Bevezető számítások

Ezek a bevezető számolások *nem* a másodfokú egyenlet megoldó nomogramjának konstruálását vagy lényegét tartalmazzák, hanem csak "ellenőrzést", a nomogram "jóságát".

**Figyelem:** A számolóábra használatakor a $p, q, x, y, z$ változók egyike sem lehet 0 , pontosabban a 0 esetet külön meg kell vizsgálnunk.

$p = 0$ esetén az $A$ pont végtelen távol van, az $AB$ egyenes vízszintes és a parabolát $q < 0$ esetén valóban a $\pm\sqrt{q}$ pontokban metszi, míg $q = 0$ esetén a $B$ pont végtelen távol van, az $AB$ egyenes függőleges és a parabolát tényleg a $-p$ és a végtelen távoli 0 pontban metszi.

**Számolóábráknál** (nomogramok) és logarléceknél a tengelyekre és a görbékre felírt számok általában nem egyeznek meg a geometriai (valódi) távolság-értékekkel. Ezeket körültekintően meg kell különböztetnünk, ezért az alábbi jelölést vezetjük be:

**Jelölés:** Minden (geometriai) ponthoz írt értékeket, azaz a **feliratokat**

$$p_F \ , \ q_F \ , \ x_F \ , \ y_F \ , \ z_F \ , \ \dots \tag{2}$$

-el jelöljük, míg *ugyanezen pontok* **geometriai** értékei, azaz a valódi **távolságok** az origótól

$$p_g \ , \ q_g \ , \ x_g \ , \ y_g \ , \ z_g \ , \ \dots \ . \tag{3}$$

Tehát nagyon figyeljünk az alsó indexekre!

A számolóábra (nomogram) nyilván akkor használható könnyen, ha a $p_F$ , $q_F$ , $z_{1F}$ és $z_{2F}$ értékeket találjuk meg rajta, tehát (1) precízen az alábbi egyenlet jelenti:

$$\boxed{z_F^2 + p_F \cdot z_F + q_F = 0} \ . \tag{4}$$

**1. Észrevétel**: A bemutatott nomogramon a *tengelyeken* reciprok skálák vannak, vagyis

$$p_F = \frac{1}{p_g} \quad \text{és} \quad q_F = \frac{1}{q_g} \ . \tag{5}$$

A parabola egyenlete $y = -x^2$ azaz $q_g = -p_g^2$ , vagyis $\frac{1}{q_F} = -\left(\frac{1}{p_F}\right)^2 = \frac{-1}{p_F^2}$ azaz $q_F = -p_F^2$ .

**2. Észrevétel:** a parabolára írt "$z$" számok éppen az adott (geometriai) $P\,(x, y)$ pont $x$ koordinátáihoz írt $-p_F$ értékek, vagyis $z_F = -p_F$ ahol

$$P = \left(x \ , \ -x^2\right) = \left(\frac{1}{p_F} \ , \ \frac{-1}{p_F^2}\right) = \left(\frac{-1}{z_F} \ , \ \frac{-1}{z_F^2}\right) \ . \tag{6}$$

**ÁLLÍTÁS:** a számolóábra jó. (Ellenőrzés.)

**Tehát** azt kell igazolnunk, hogy az egyenes vonalzónk illesztéséhez használt

$$A\,(p_F) = \left(\frac{1}{p_F} \ , \ 0\right) \quad \text{és} \quad B\,(q_F) = \left(0 \ , \ \frac{1}{q_F}\right) \tag{7}$$

pontok, valamint a parabolán jelölt

$$C_1\,(z_1) = \left(\frac{-1}{z_{F1}} \ , \ \frac{-1}{z_{F1}^2}\right) \quad \text{és} \quad C_2\,(z_2) = \left(\frac{-1}{z_{F2}} \ , \ \frac{-1}{z_{F2}^2}\right) \tag{8}$$

pontok *egy egyenesbe esnek*. Vagyis: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC_i}$ azaz $\det\left(\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AC_i}\right) = 0 \ (i = 1, 2)$.

Az alábbi bizonyításban elhagyjuk az $F$ alsó indexeket.
Fel fogjuk használni a *Viète* összefüggéseket (ld.pl. [5]):

$$z_1 \cdot z_2 = q \quad \text{és} \quad z_1 + z_2 = -p \ , \tag{9}$$

azaz

$$p + z_1 = -z_2 \quad \text{és} \quad p + z_2 = -z_1 \ . \tag{10}$$

Mivel $z_1$ és $z_2$ szerepe szimmetrikus, ezért elég a $C_1$ pontra bizonyítanunk:

$$\overrightarrow{AB} = \left( \tfrac{-1}{p} \ , \ \tfrac{1}{q} \right) \ , \quad \overrightarrow{AC_1} = \left( \tfrac{-1}{z_1} - \tfrac{1}{p} \ , \ \tfrac{-1}{z_1^2} \right) = \left( \tfrac{-p-z_1}{p \cdot z_1} \ , \ \tfrac{-1}{z_1^2} \right) ,$$

$$\det \left( \overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AC_1} \right) = \tfrac{-1}{p} \cdot \tfrac{-1}{z_1^2} - \tfrac{1}{q} \cdot \tfrac{-p-z_1}{p \cdot z_1} = \tfrac{1}{p \cdot z_1} \cdot \left( \tfrac{1}{z_1} + \tfrac{p+z_1}{q} \right) = \tfrac{1}{p \cdot z_1} \cdot \left( \tfrac{z_2}{z_1 z_2} + \tfrac{-z_2}{q} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{p \cdot z_1} \cdot \left( \tfrac{z_2}{q} + \tfrac{-z_2}{q} \right) = 0 \ . \qquad \square$$

# 2. Készítése

De hogyan készült, vagyis hogyan találták fel a fenti egyszerű de hasznos kis segédeszközt? Ebben a fejezetben *egy lehetséges* szerkesztést elemzünk.

Ha a nomogramot a fenti módon szeretnénk használni ("$p_F$ és $q_F$ az $x$ és $y$ tengelyeken, vonalzó ide és metsz a görbén", (5) és $z_F = -p_F$), akkor a görbe nyilván mértani helye az $AB$ egyenesek és a $z_1$ és $z_2$ -nél függőlegesen húzott egyenesek metszéspontjainak.

Az $AB$ egyenes egyenlete (**Salmon**-féle tengelymetszetes egyenlet és (5) alapján):

$$\frac{x}{1/p_F} + \frac{y}{1/q_F} = 1 \quad \text{vagyis} \quad y = \frac{1 - p_F x}{q_F} \ , \tag{11}$$

ennek metszete (9) szerint a függőleges $x = \frac{-1}{z_1} = \frac{-z_2}{q_F}$ egyenessel:

$$y = \tfrac{1}{q} \cdot \left( 1 + p \cdot \tfrac{z_2}{q} \right) = \tfrac{1}{q^2} \cdot (q + p z_2) = \tfrac{-z_2^2}{q^2} = - \left( \tfrac{z_2}{q^2} \right)^2 = -x^2$$

hiszen $\quad z_2^2 + p z_2 + q = 0 \quad$ miatt $\quad p z_2 + q = -z_2^2$ .

Tehát a görbe tényleg egy közönséges parabola. $\square$

**Megfordítva:** Az $AB$ egyenes és az $y = -x^2$ parabola metszéspontját vizsgáljuk:

$y = \frac{1-px}{q} = -x^2$ , ahonnan

$$0 = x^2 - \frac{p}{q} \cdot x + \frac{1}{q} = \frac{x^2}{q} \cdot \left( q - p \cdot \frac{1}{x} + \left( \frac{1}{x} \right)^2 \right) \ , \tag{12}$$

melynek $x_{1,2}$ gyökei az eredeti $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökeinek negatív reciprokai: $x_i = \dfrac{-1}{z_i}$ .

# 3. További észrevételek

**3. Észrevétel:** A parabola és az $y$ tengely által az $AB$ egyenesből kimetszett szakaszok aránya épp a $z_1$ és $z_2$ gyökök aránya.

Ez szemléletesen belátható a számolóábrán: a vízszintes tengelyen $-(x_1)_F$ és $-(x_2)_F$ van, az $AB$ egyenest és a vízszintes $(x)$ tengelyt egy szögtartománynak tekinthetjük, a parabola és az $AB$ egyenes metszéspontjaiban húzott függőleges egyenesek az $x$ tengelyen épp a gyökök értékeit mutatják: $z_{1F} = \frac{-1}{z_{1g}}$ és $z_{2F} = \frac{-1}{z_{2g}}$ , ezek aránya valóban $\frac{z_2}{z_1}$ , és a szögtartományra a függőleges egyenesekkel a párhuzamos szelők tételét alkalmazva épp a bizonyítandó állítást kapjuk.

Az állítást azonban számolással is megkaphatjuk: (7) és (8) alapján:

Ha a $D$ pont az $AB$ és $y$ tengely metszéspontja, akkor nyilván $D = \left(0\ ,\ \frac{1}{q}\right) = \left(0\ ,\ \frac{1}{z_1 z_2}\right)$ , és ekkor a keresett arány:

$$\frac{C_1 D}{C_2 D} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{z_2^2}{z_1^2 \cdot z_2^2} + \left(\frac{z_1+z_2}{z_1^2 \cdot z_2}\right)^2}{\frac{z_1^2}{z_1^2 \cdot z_2^2} + \left(\frac{z_1+z_2}{z_1 \cdot z_2^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{z_1^2 \cdot z_2^2}{z_1^4 \cdot z_2^2} + \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1^4 \cdot z_2^2}}{\frac{z_1^2 \cdot z_2^2}{z_1^2 \cdot z_2^4} + \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1^2 \cdot z_2^4}}} =$$

$$= \frac{z_1 \cdot z_2^2}{z_1^2 \cdot z_2} \cdot \sqrt{\frac{z_1^2 \cdot z_2^2 + (z_1 + z_2)^2}{z_1^2 \cdot z_2^2 + (z_1 + z_2)^2}} = \frac{z_2}{z_1}\ . \quad \square$$

**4. Kérdés:** miért kellett a tengelyeken reciprok skálákat felvenni ? Talán ekkor már az $AB$ egyenes képe nem lenne egyenes, hanem ennek inverziós képe, egy kör. Erre a "*Lineáris léptékkel*" fejezetben keresünk választ.

**5. Kérdés:** $D = 0$ azaz $p_F^2 = 4q_F$ esetében az $AB$ egyenesnek a parabola érintőjét kell adnia. Ezt is érdekes lenne végigszámolni.

# 4. Lineáris léptékkel

Próbáljunk meg egy nomogramot szerkeszteni úgy, hogy a tengelyeken lineáris lépékeket alkalmazunk, azaz $p_F = p_g$ és $q_F = q_g$ .

**Először** is vizsgáljuk meg az (1) egyenletet közelebbről. Kis átalakítás után: $px + q = -x^2$, tehát a gyökök a következő két függvény metszéspontjainak első koordinátái: $y = px + q$ *egyenes* és $y = -x^2$ parabola.

Ez egy hagyományos grafikus megoldás lehetne. Az $y = -x^2$ parabolát könnyű felrajzolni (csak egyszer kell), az egyenes az $y$ tengelyt a $q$ értéknél metszi, és $p$ az egyenes *meredeksége*, amit "kicsit" nehéz és pontatlan beállítani a grafikus megoldásnál: már derékszögű háromszöget kellene szerkeszteni, stb. Sajnos, nem túl praktikus, annak ellenére, hogy a tengelyeken a szokásos lineáris skála (milllliméterpapír) mellett ésszerű tartományok ábrázolhatóak.

**Tehát:** a *tetszőleges* $A(u,0)$ és $B\,(0,v)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$ vagyis $y = v \cdot \left(1 - \frac{x}{u}\right) = v - \frac{v}{u} \cdot x$ , aminek metszete az $y = -x^2$ parabolával: $-x^2 = v - \frac{v}{u} \cdot x$ azaz $0 = x^2 - \frac{v}{u} \cdot x + v = vx^2 \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ , amely másodfokú egyenlet gyökei $z_i = \frac{-1}{x_i}$ , és az együtthatók $p = \frac{1}{u}$ és $q = \frac{1}{v}$ .

Ez (is) magyarázza a reciprok lépték szükségességét a tengelyeken!

# 5. Villamosmérnöki gondolatok

Feltesszük, hogy a nomogram használatakor az $x_1$ , $x_2$ gyököket az $f_1(x) = -x^2$ *parabola* és a $C_1$ , $C_2$ pontokon átmenő *egyenes* metszéspontjaiként kapjuk meg, és a tengelyeken vannak $p$ és $q$ értékei.

**Lineáris skálák esetén:**

A $C_1\,(x_1, -x_1^2)$, $C_2\,(x_2, -x_2^2)$ pontokon átmenő *egyenes* egyenlete

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (x - x_1) + y_1 = \frac{-(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) - x_1^2 \\ &= -(x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2 \end{aligned} \tag{13}$$

amely az $x$ tengelyt az $f(x_0) = 0$ vagyis

$$x_0 = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\ . \tag{14}$$

Ez mellesleg az elekronikából jól ismert **replusz** (reciprok plusz) művelet[2)], ami pl. két párhuzamos ellenállás ($R_1$, $R_2$) eredő ellenállását adja meg:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{vagyis} \quad R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\ . \tag{15}$$

[2)] ami éppen a harmonikus középérték fele

Továbbá a $C_1C_2$ egyenes az $y$ tengelyt az

$$f(0) = x_1x_2 \tag{16}$$

pontban metszi.

A (9) Viète összefüggéseknek (16) ugyan eleget tesz, de (14) nem, ha a tengelyeken $p$ -t és $q$ -t szeretnénk látni.

*Villamosmérnökként* gondolkozva a gyökökre úgy tekinthetünk mint ellenállások, és ha $p$ a kettő replussza, akkor tudjuk "linearizálni" a feladatot, ha vesszük a reciprokokat, tehát *vezetésekkel* számolunk ellenállások helyett.

**Reciprok skálák esetén**:

Tehát vegyünk mindkét tengelyen *reciprok skálákat* ((5) és (23) szerint). $f_1(x)$ függvény marad a $-x_1^2$ függvény. A két metszéspont $C_1\left(\frac{1}{x_1}\ ,\ \frac{-1}{x_1^2}\right)$ és $C_1\left(\frac{1}{x_2}\ ,\ \frac{-1}{x_2^2}\right)$. A $C_1C_2$ egyenes egyenlete:

$$f_2(x) = \frac{-\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right)}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} \cdot \left(x - \frac{1}{x_1}\right) - \frac{1}{x_1^2} = -(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) \cdot x + \frac{1}{x_1x_2}\ , \tag{17}$$

melynek metszéspontja $x$ tengellyel $f_2(x_0) = 0$ ahonnan

$$x_0 = \frac{1}{x_1 + x_2}\ . \tag{18}$$

Mivel $p$ -re is reciprok skálánk van, ezért $(x_0)_g = \frac{1}{(x_0)_F}$ vagyis a metszéspontnál levő $(x_0)_F$ felirat éppen $-p_F$ ! A $C_1C_2$ egyenes $y$ tengellyel vett metszéspontja $f(0) = \frac{1}{x_1x_2}$ , ami szintén megegyezik $q_F$ -el!

**Megfordítva:** az $x$ tengelyen levő reciprok skála $p_F$ -ek értékét adja meg, a gyököknél pedig $-(x_{1F})$ és $-(x_{2F})$ feliratokat kell elhelyeznünk!

# 6. A felfedezés

Már talán eleget tudtunk meg a másodfokú számolóábráról, tehát akár fel is fedezhetjük, minden előzetes információ nélkül ("a semmiből").

**Tehát** az (1) $\quad x_F^2 + p_F \cdot x_F + q_F = 0 \quad$ egyenletünk van. Pár ügyes átalakítással:

$$x_F^2 + p_F \cdot x_F + q_F = 0 \quad / : x_F^2 \quad \text{(feltéve, hogy } x_F \neq 0\text{)}$$

$$1 + p_F \cdot \frac{1}{x_F} + q_F \cdot \frac{1}{x_F^2} = 0 \ ,$$

$$1 = p_F \cdot \frac{-1}{x_F} + q_F \cdot \frac{-1}{x_F^2} \ . \tag{19}$$

HA most (ismét)

$$y_F = -x_F^2 \ , \tag{20}$$

AKKOR

$$\frac{-1}{x_F^2} = \frac{1}{y_F} \tag{21}$$

és

$$1 = p_F \cdot \frac{-1}{x_F} + q_F \cdot \frac{1}{y_F} \ . \tag{22}$$

HA még

$$x_F = \frac{-1}{x_g} \ , \ y_F = \frac{1}{y_g} \ , \ p_F = \frac{1}{p_g} \text{ és } q_F = \frac{1}{q_g} \ , \tag{23}$$

AKKOR (22) geometriai jelentése

$$1 = \frac{x_g}{p_g} + \frac{y_g}{q_g} \ , \tag{24}$$

ami pedig az

$$A\,(p_g, 0) \quad \text{és} \quad B\,(0, q_g) \tag{25}$$

pontokon áthaladó egyenes "tengelymetszetes" (vagy Salmon-féle) egyenlete, és (21) pedig geometriailag

$$-x_g^2 = y_g \tag{26}$$

a "lefelé álló parabola" egyenlete.

**Összefoglalva:** az (1) egyenlet nemnulla $x_{1,F}$ (és $x_{2,F}$) gyökei éppen az (21), azaz (26) lefelé álló parabolának és az $AB$ pontokra (25) fektetett (24) egyenesnek a metszéspontjai, ráadásul ezen metszéspontok pontosan a vízszintes tengelynek az $x_{1,F}$ (és $x_{2,F}$) feliratok alatt (függőlegesen) levő pontjai!

Ez pedig éppen a bevezetőben bemutatott számolóábra! $\square$

# 7. Harmadfokú egyenletek

Minden harmadfokú egyenlet standard módon alakítható át

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{azaz} \quad x_F^3 + p_F \cdot x_F + q_F = 0 \tag{27}$$

alakra ([6], [7]). Próbáljuk meg az előző fejezetben alkalmazott módon átalakítani:

$x_F^3 + p_F \cdot x_F + q_F = 0 \quad / : x^3 \quad$ (feltéve, hogy $x_F \neq 0$)

$$1 + p_F \cdot \frac{1}{x_F^2} + q_F \cdot \frac{1}{x_F^3} = 0 \ ,$$

$$1 = p_F \cdot \frac{-1}{x_F^2} + q_F \cdot \frac{-1}{x_F^3} \ . \tag{28}$$

Legyen most

$$\boxed{p_F = \frac{1}{p_g} \text{ és } q_F = \frac{1}{q_g}} \tag{29}$$

és

$$\boxed{x_F^2 = \frac{-1}{x_g} \text{ és } x_F^3 = \frac{-1}{y_g}} \ , \tag{30}$$

ekkor

$$x_F = \pm\sqrt{\tfrac{-1}{x_g}} \tag{31}$$

és

$$y_g = \frac{-1}{x_F^3} = \pm\left(\sqrt{-x_g}\right)^3 = \pm\left(-x_g\right)^{3/2} \tag{32}$$

és (28) jelentése

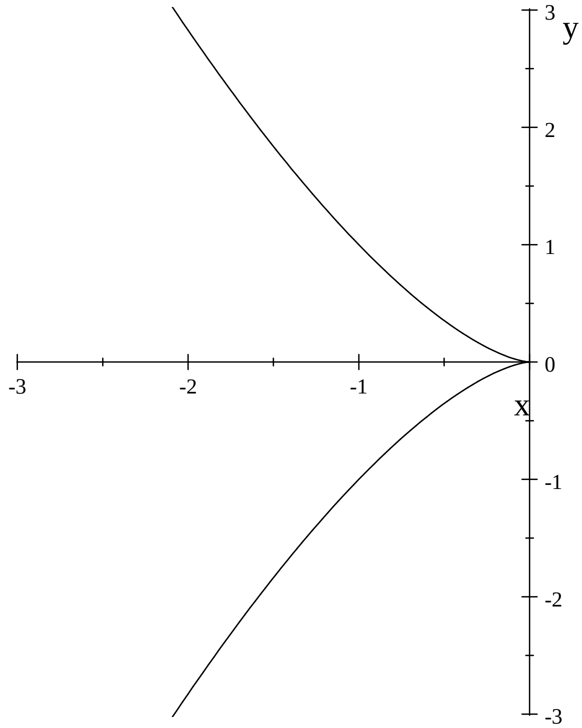
$$1 = \frac{x_g}{p_g} + \frac{y_g}{q_g} \ , \tag{33}$$

ami az

$$A\left(p_g, 0\right) \quad \text{és} \quad B\left(0, q_g\right) \tag{34}$$

pontokon áthaladó egyenes egyenlete.

**Tehát** megint van az $AB$ egyenesünk és a (32) egyenletű görbénk.




**Az** $y = \pm(-x_g)^{3/2}$ **egyenletű görbék**

**Összefoglalva: A harmadfokú nomogram elkészítése.**

**i)** a vízszintes és függőleges tengelyeken $p$ és $q$ beosztása reciprok skála (29) szerint - mint a másodfokú számolóábránál,

**ii)** megrajzoljuk az $y_g = \pm(-x_g)^{3/2}$ görbéket (szimmetrikus az $x$ tengelyre),

**iii)** a vízszintes tengelyen (31) alapján $x_F$ részére felveszünk egy

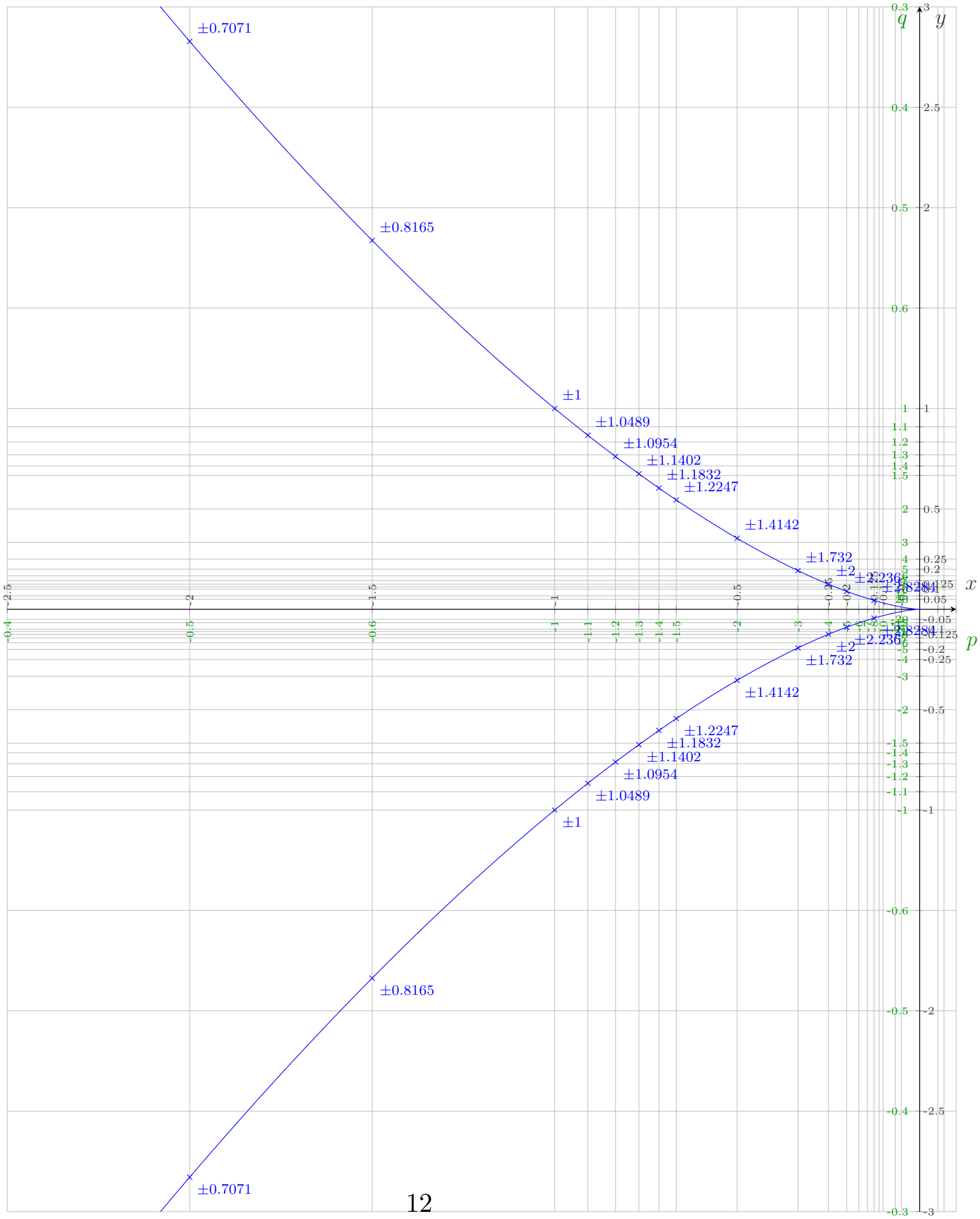
$$x_F = \pm\sqrt{\frac{-1}{x_g}} \tag{35}$$

beosztást (azaz az origótól $-x_g$ távolságra $x_F$ feliratot írunk),

**iv)** az $x_F$ feliratokat függőlegesen levetítjük és ráírjuk a ii) görbére.

**A nomogram használata:**

**v)** a megfelelő $p_F$ , $q_F$ pontokra fektetett $AB$ egyenes kimetszi az ii) görbén a gyököket.



±0.7071
±0.8165
±1
±1.0489
±1.0954
±1.1402
±1.1832
±1.2247
±1.4142
±1.732
±2
±2.236
q
y
x
p

Ha nem tudjuk vagy nem akarjuk a görbére közvetlenül ráírni a számokat, akkor az $AB$ egyenes és a görbe kapott metszéspontjait függőlegesen vetítjük a vízszintes tengelyre és ott olvassuk le $x_F$ értékeit. $\square$

**Sajnos** (31) miatt már az iii) pontban sem tudtuk az $x_F$ értékek *előjeleit* egyértelműen felírni. Tehát számolóábránk csak a *gyökök abszolút értékeit* adja meg, a gyökök előjeleit nekünk kell behelyettesítéssel vagy a Viète összefüggések (42) alapján meghatároznunk.

Honlapunkon [12] közöljük a nagyfelbontású számolóábrákat. Az ábrát biztosan feltalálták már előttünk, csak esetleg a négyzetes-reciprok skála miatt nehézkes és pontatlan a használata, ezért nem tartották őseink megörökítésre méltónak.

## 7.1. Megjegyzések, kérdések

**1. Megjegyzés:** Már az előző alfejezet végén tárgyaltuk a gyökök előjeleinek problémáját. Sajnos erre jobb választ nem tudunk, nyitott kérdés, hogy van-e előjelhelyes nomogram a harmadfokú egyenlet megoldásához.

**2. Kérdés:** Mit jelent (30), azaz mennyi $y_F$ ? Tulajdonképpen lényegtelen, vagyis $y_F$ skálára nincs szükségünk. Az $y_g = f\left(x_g\right)$ görbét viszont (32) egyértelműen meghatározza.

**3. Megjegyzés:** A nomogram megtervezése sokkal egyszerűbb lenne az

$$x^3 + px^{\mathbf{2}} + q = 0 \tag{36}$$

alakú egyenletekre, de sajnos *nem minden* harmadfokú egyenlet hozható ilyen alakra.

**4. Kérdés:** Ha tudtunk nomogramot szerkeszteni másodfokú egyenletre síkban, akkor tudunk-e *térbeli* nomogramot készíteni az általános $z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta = 0$ alakú harmadfokú egyenletek megoldására? Erre sem tudjuk még a választ.

**5. Kérdés:** A $p, q$ értékekre illesztett $AB$ egyenes hogyan metszi a két görbét *három* pontban? Az ábrán láthatjuk, hogy a felső görbe konvex, az alsó konkáv! A diszkrimináns (44) alapján pedig akkor van három különböző valós gyök, ha $\Delta < 0$ . Ez pedig ugye akkor van, ha $p$ erősen negatív, és ebben az esetben az egyenes valóban metszheti az egyik görbét kettő, a másik görbét pedig egy pontban. Tehát van három gyökünk !

Mivel a két görbe együtt szimmetrikus a vízszintes tengelyre, ezért $q$ előjele (a függőleges tengelyen) lényegtelen: a gyökök ugyanazok. Ez összhangban van a Cardano képlettel (43), mert $q^2$ miatt ott sem lényeges $q$ előjele, és természetesen $\Delta$ -ban sem.

**6. Kérdés:** A három gyök lehet-e egy egyenesen?

A három gyök mindegyike kielégíti (27) és (28) -et, amik ekvivalensek (ha egyik gyök sem 0). (29), (31) és (32) esetén a fenti (28) ekvivalens (33) -el, ami egy valóságos geometriai egyenes, méghozzá (34)-beli pontokkal, tehát OK, vagyis a három (vagy amennyi van) gyök mindenképpen egy egyenesre esik !

**7. Kérdés:** Ha csak az egyik gyököt változtatom meg, a másik két gyökön áthaladó egyenes "mit csinál"? Ez egy fogas kérdés. De ne feledjük: nomogramunk *csak* a (27) alakú egyenletekre működik, márpedig ha csak az egyik gyököt változtatjuk meg, akkor - a (42) Viète összefüggés alapján ezt a három gyököt megadó egyenlet már nem lesz (27) alakú!

## 7.2. Diszkriminánsok

Ebben az alfejezetben néhány hasznos képletet és tudnivalót sorolunk fel a harmadfokú egyenletekről.

**1. Állítás:** Minden

$$z^{\mathbf{3}} + \beta z^2 + \gamma z + \delta = 0 \tag{37}$$

alakú egyenlet a $Z := z + \frac{\beta}{3}$ helyettesítéssel ekvivalens módon átalakítható

$$Z^{\mathbf{3}} + pZ + q = 0 \tag{38}$$

alakú egyenletté. (**Bizonyítás:** Házi Feladat vagy [6],[7].) $\square$

**2. Állítás** (*Viète formulák*)**:** Ha a fenti egyenletek (akár komplex akár valós) gyökei $z_1, z_2, z_3$ illetve $Z_1, Z_2, Z_3$ , akkor a

$$(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) = z^{\mathbf{3}} + \beta z^2 + \gamma z + \delta \tag{39}$$

és

$$(Z - Z_1) \cdot (Z - Z_2) \cdot (Z - Z_3) = Z^{\mathbf{3}} + pZ + q \tag{40}$$

összefüggések alapján

$$\begin{aligned} -(z_1 + z_2 + z_3) &= \beta \\ z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 &= \gamma \\ -z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= \delta \end{aligned} \tag{41}$$

és

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 + Z_3 &= 0 \\ Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1 &= p \\ -Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 &= q \ . \quad \square \end{aligned} \tag{42}$$

**3. Tétel** (*Cardano-Fontana* [3] formula, [6]): A (40) egyenlet gyökei

$$z_i = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \ . \quad \square \tag{43}$$

**4. Definíció:** A harmadfokú egyenlet **diszkriminánsa** ([8], [9])

$$\Delta := \left(\tfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{p}{3}\right)^3 \ . \quad \square \tag{44}$$

**5. Tétel** ([6]-[9])**:**

HA $\Delta > 0$ akkor a Cardano formulában levő négyzetgyökvonás elvégezhető és az egyenletnek mindig egy valós és két (igazi) konjugált komplex gyöke van,

HA $\Delta = 0$ akkor és csak akkor ha legalább két gyök azonos (van többszörös gyök),

HA $\Delta < 0$ akkor a négyzetgyök alatt negatív szám van, DE az egyenletnek három valós gyöke van. $\square$

## 7.3. Példák

A nomogram kipróbálásához néhány egyenletet előre megoldottunk a Cardano-Fontana képlettel.

$x^3 + \dfrac{-1}{0.3}x + \dfrac{1}{0.5} = x^3 - 3.3333x + 2 = 0 \quad (p_F = \frac{-1}{0.3}$ azaz $p_g = 0.3)$,

Megoldása: $(x_i)_F = 1.3680 \ , \ 0.70522 \ , \ -2.0732 \ ,$

$(x_i)_g = \frac{-1}{(1.3680)^2} = -0.53435 \ , \ \frac{-1}{(0.70522)^2} = -2.010\,7 \ , \ \frac{-1}{(-2.0732)^2} = -0.23266 \ ,$

$x^3 + \dfrac{-1}{0.4}x + \dfrac{1}{0.8} = x^3 - 2.5x + 1.25 = 0 \ ,$

Megoldása: $(x_i)_F = 1.2118 \ , \ 0.57673 \ , \ -1.7885 \ ,$

$(x_i)_g = \frac{-1}{(1.2118)^2} = -0.68099 \ , \ \frac{-1}{(0.57673)^2} = -3.006\,5 \ , \ \frac{-1}{(-1.7885)^2} = -0.31262 \ ,$

$x^3 + \dfrac{-1}{0.2}x + \dfrac{1}{0.3} = x^3 - 5x + 3.3333 = 0 \ ,$

Megoldása: $(x_i)_F = 1.7635 \ , \ 0.75157 \ , \ -2.515$

[3] A képletet általában *Cardano-Tartaglia* vagy csak *Cardano* képletnek hívják. A képletet valójában Tartaglia találta fel, akinek eredeti neve **Niccoló Fontana,** Tartaglia csak a gúnyneve ("dadogós").

$(x_i)_g = \frac{-1}{(1.7635)^2} = -0.32155$ , $\frac{-1}{(0.75157)^2} = -1.7704$ , $\frac{-1}{(-2.515)^2} = -0.15810$ ,

$x^3 + \dfrac{-1}{0.2}x + \dfrac{1}{1} = x^3 - 5x + 1 = 0$ ,

Megoldása: $(x_i)_F = 2.1284$ , $0.20164$ , $-2.3301$

$(x_i)_g = \frac{-1}{(2.1284)^2} = -0.22075$ , $\frac{-1}{(0.20164)^2} = -24.595$ , $\frac{-1}{(-2.3301)^2} = -0.18418$ ,

$x^3 + \dfrac{-1}{0.45}x + \dfrac{1}{1.5} = 0$ ,

Megoldása: $(x_i)_F = 1.3088$ , $0.31392$ , $-1.6227$

$(x_i)_g = \frac{-1}{(1.3088)^2} = -0.58379$ , $\frac{-1}{(0.31392)^2} = -10.148$ , $\frac{-1}{(-1.6227)^2} = -0.37977$ .

# 8. Hivatkozások


[**0**] *Függvénytáblázatok, matematikai és fizikai összefüggések,* Tankönyvkiadó, 1968.

[**1**] **Martel, P.:** *Nomograms,* http://www.philmartel.com/Nomograms.html és http://www.philmartel.com/nomogram/Quadratic_line.html

[**2**] http://lalashan.mcmaster.ca/theobio/math/index.php/Nomogram

[**3**] https://hu.wikipedia.org/wiki/Másodfokú_egyenlet

[**4**] https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_equation

[**5**] https://hu.wikipedia.org/wiki/Viète-formulák

[**6**] https://hu.wikipedia.org/wiki/Harmadfokú_egyenlet

[**7**] https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function (redirected from *Cardano formula*)

[**8**] https://hu.wikipedia.org/wiki/Diszkrimináns

[**9**] http://en.wikipedia.org/wiki/Discriminant

[**10**] https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist_plot

[**11**] **Görbe Péter:** *Villamosságtan jegyzet*, Pannon Egyetem, Kézirat, 2017.

[**12**] http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Nomogramok.zip