Hatványok és A Logaritmus

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2017.12.30.

www: Haladvány Kiadvány, 2017.12.30.

Bevezetés

A címben szereplő **Logaritmus** nagybetűvel írandó, mert Ő a Mumus az iskolákban. Ebben a kis összeállításban megpróbáljuk a szükséges szemléletmódot elmagyarázni az iskolásoknak, tehát örömmel fogadunk minden megjegyzést és visszajelzést. Kis összefoglalónkat középiskolás és egyetemi diákoknak és tanároknak egyaránt szántuk.

Az alábbiakban a hatványoknak és a logaritmusnak inkább a *szemléletét*, lényegét átadni tűztük ki célul, mint a tananyag részletes tanítását. (Vagyis a tankönyvet is el kell olvasnunk.) A gondolatokat, példákat, szemléltetéseket nem feltétlenül a leírtak sorrendjében kell olvasnunk, de alaposan meg kell emésztenünk, átgondolnunk, többször is el kell olvasnunk, türelmesen, nem egyszuszra. Ha egy-egy rész nem teljesen világos, először ugorjuk át, hátha később világos lesz számunkra mindanivalója.

Igyekeztünk közvetlen, oldott, sokszor vicces hangnemben fogalmazni, hiszen most a lényeg a szemléltetés és az anyag megértése, de ne feledjük: az anyag nagyon is komoly!

Javasoljuk olvasás közben a számológépet is nyomogatni, mert közben nem csak a számításokat ellenőrizzük, hanem gyakorolgatjuk is a hatványoka és a logaritmust, és a számológép használatát is.

Hatványok

Az alábbiakban a mindig egy rögzített pozitív számot jelöl ($a \in \mathbb{R}^+$), például lehet 2 , 3 , 10 , 15 , 1.001 , 0.999 , 0.001 vagy akár az a titokzatos Euler[1)]-féle e szám, ami $e \approx 2.718281828$.

Hatványokkal kapcsolatban elsősorban mindig az legyen az eszünkben, hogy

$$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \quad (n \text{ tényezős szorzat}) \tag{1}$$

ha $n = 1, 2, ...$ természetes (pozitív egész) szám.

Továbbá

$$a^0 = 1 \quad \text{és} \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{2}$$

és így

$$a^{-n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot ... \cdot \frac{1}{a} \tag{3}$$

(szintén n tényezős szorzat), ami ugyanaz, mint

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot ... \cdot a} = \frac{1}{a^n} \ , \tag{4}$$

vagyis a negatív kitevő (a $-$ előjel a kitevőben) a reciprokot[2)] jelenti, vagyis a "*törtvonalat rövidíti*".

A fentiekből könnyen beláthatjuk például a következő összefüggéseket, tetszőleges $n, m \in \mathbb{Z}$ egész kitevőkre:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \ , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{és} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \ . \tag{5}$$

Ha n és m mindkettő pozitív szám, akkor ezek az azonosságok nyilvánvalóak[3)]. Ha pedig n és m egyike vagy mindkettő negatív vagy 0 , akkor egy kicsit gondolkodnunk kell - VAGY csak egyszerűen elfogadjuk, megjegyezzük és használjuk az (5) azonosságokat.

Az (5) fenti azonosságokat ugyan csak $n, m \in \mathbb{Z}$ egész számokra gondoltuk át (bizonyítottuk be), DE nagyon jó **memoriter**[4)], hiszen az (5) azonosságok *tetszőleges* $n, m \in \mathbb{R}$ valós kitevőkre is ugyanígy igazak! (Bár a bizonyítás tetszőleges $n, m \in \mathbb{R}$ kitevőkre meglehetősen hosszú.)

A következő, nagyon fontos tény:

[1)] Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus.
[2)] reciprok = megfordított (latinul)
[3)] az (5) összefüggéseket már Archimedesz (Kr.e. 287-212) is tudta
[4)] a megjegyzést segítő versike.

1. Tétel. *A kitevőket és az a^x hatványokat értelmezni (definiálni) tudjuk* tetszőleges *$x \in \mathbb{R}$ valós kitevőkre.*

A tankönyvben ennek hosszú menete le van írva, de a lényeg az, hogy *tetszőleges* $x \in \mathbb{R}$ valós számra és $a \in \mathbb{R}^+$ alapra létrehozzuk az a^x mennyiséget (képletet), aminek végeredménye $b = a^x$ szintén egy valós szám, "véletlenül" szintén egy pozitív szám: $b \in \mathbb{R}^+$. Mégpedig úgy, hogy egyrészt az (5) azonosságok igazak maradnak n, m helyett tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós kitevőkre is.

Másrészt, ami szintén nagyon fontos, hogy a most létrehozott a^x mennyiségek (függvények) x -ben **monoton**[5)] módon változnak, vagyis, például: ha nem is tudom hirtelen, hogy mennyi $c = 10^{2.3547214032}$, de az biztos, hogy 10^2 és 10^3 között van valahol. Sőt, ha már $10^{2.3}$ és $10^{2.4}$ értékét sikerült kiszámolnom, akkor már azt is tudom, hogy $10^{2.3} < c < 10^{2.4}$. Általában pedig:

2. Tétel.

$1 < a$ *esetén:* $x < y < z \iff a^x < a^y < a^z$,

$0 < a < 1$ *esetén:* $x < y < z \iff a^x > a^y > a^z$, ***(@)***

$1 = a$ *esetén* $a^x = 1$ *minden x -re .*

A Tétel az a^x hatványozás monotonitását állítja, nem csak az $a = 10$ esetre. Például, $2 < x < 3$ esetén biztosan $9^2 < 9^x < 9^3$, sőt ez nem csak 9 -re és nem csak $2 < x < 3$ esetén teljesül. Vigyázzunk: 1 -nél kisebb a alap esetén az x kitevő növelésekor a hatvány csökken: pl. $0.9^2 > 0.9^x > 0.9^3$ ha $2 < x < 3$ (mert 1 -nél kisebb számmal szorozgatunk ...).

Tehát az x kitevő lehet pozitív és negatív, akármilyen racionális vagy akár irracionális is (lásd a tankönyvekben).

---

5) mono-ton = egy-hangú (gör.)

Mértani sorozatok

Nézzük meg a következő érdekes táblázat-részletet, amelyhez hasonlót (pontosabban sokkal nagyobbat) már a XVI. században elkészítettek és vaskos könyvekben kinyomtattak sok példányban (és jó pénzért árusítottak), a számolás megkönnyítésére:

"numer."	"log"	"numer."	"log"	"numer."	"log"
		1,0513	500	. . .	
1,0001	1	1,0514	501	1,3958	3 335
1,0002	2	1,0515	502	1,3960	3 336
1,0003	3	1,0516	503	1,3961	3 337
1,0004	4	1,0517	504	. . .	
1,0005	5	1,0518	505	. . .	
1,0006	6	1,0519	506	2,7181	10 000
1,0007	7	1,0520	507	2,7184	10 001
1,0008	8	1,0521	508	2,7187	10 002
1,0009	9	1,0522	509	2,7190	10 003
1,0010	10	1,0523	510	2,7192	10 004
. . .		. . .			
1,0100	100	1,1052	1000	2,7195	10 005
1,0102	101	1,1053	1001	2,7198	10 006
1,0103	102	1,1054	1002	2,7200	10 007
1,0104	103	1,1055	1003	2,7203	10 008
1,0105	104	1,1056	1004	2,7206	10 009
1,0106	105	1,1057	1005	2,7209	10 010
1,0107	106	1,1058	1006	. . .	
1,0108	107	1,1059	1007	2,7457	10 101
1,0109	108	1,1060	1008	2,7460	10 102
1,0110	109	1,1062	1009	2,7463	10 103
1,0111	110	1,1063	1010	. . .	

1.Táblázat: 1.0001 *hatványai*

A táblázat az $a = 1.0001$ szám egész kitevős hatványait tartalmazza **fekete** számokkal, míg mellettük a **piros** számok az (egész) kitevők. Tehát például a középső oszlop legalján azt látjuk, hogy $1.0001^{1010} \approx 1.1063$, a legutolsó feltüntetett érték pedig $1.0001^{10\ 103} \approx 2.7463$.

A fekete számokat "**numerosz**" -nak (=szám) hívták, a **piros** számokat pedig **logaritmosz** -nak, mert "*logosz*" = "szó, beszéd, (ki)**számítás**, értelem" (lat.) és "*aritmosz*" = "sor, szám, számlálás" (gör.).

Egy ilyen táblázatot nem nehéz (csak hosszadalmas) elkészíteni: mindig csak 1.0001 -el kell szorozni az előzőt. Hogyan könnyítette meg egy ilyen táblázat a számolásokat 500 évvel ezelőtt - a "*Felhasználás*" fejezetben ismertetjük. (Azt a fejezetet akár most is el lehet olvasni, és utána ide visszatérve lehet ezt a fejezetet itt folytatni.)

Számunkra most csak az a lényeges, hogy tetszőleges (fekete) számhoz azonnal megtalálható a -nak a megfelelő (piros) kitevője. Például **2.7200** *kitevője* **10 007** . (Hogy ez mire jó: a "*Felhasználás*" fejezetben ismerhetjük meg.) Röviden ezt így írhatnánk:

$$\boxed{kitev\acute{o}_{1.0001}\,(2.7200) = 10\ 007}\ , \tag{6}$$

vagy az 1.Táblázat hagyományos, XVI. századbeli görög-latin elnevezéseivel:

$$\boxed{logaritmosz_{1.0001}\,(2.7200) = 10\ 007}\ , \quad \text{röviden:} \quad \boxed{\log_{1.0001}(2.7200) = 10\ 007}\ . \tag{7}$$

Az $a = 1.0001$ számot azért írtuk kis betűkkel az alsó indexbe, mert fenti gondolatainkban nem ez a szám a legfontosabb, már a táblázat elkészítése előtt rögzítettük. Ez az a szám tulajdonképpen számításaink alapja, ezért is hívják a hatvány és a logaritmus *alapjának* (és a házak alapja is alul van, félig beásva ...) !!!

Másik fontos dolog, hogy a táblázatban *majdnem minden* valós szám megtalálható hatványként (fekete számok), pedig csak az a szám (alap) *egész* kitevőit soroltuk a fel a táblázatban. Például a **2.7202** (fekete) szám nem szerepel a táblázatban, de *kitevőjének* egészen biztosan 2.7200 és 2.7203 kitevői közé, vagyis 10 007 és 10 008 közé kell esnie (a monotonitás (@) tulajdonsága miatt). Ez azt jelenti, hogy ha a táblázatot kibővítenénk nem csak egész kitevőkre, akkor a 2.7202 szám is előbb-utóbb megjelenne, valamelyik *kitevő* mellett. Pontosabban:

$$\log_{1.0001}(2.7202) = 10\ 007.55441...\ , \tag{8}$$

vagyis 2.7202 kitevője körülbelül 10 007.55441 .

Sőt: nem csak "*majdnem minden*", hanem ***minden*** valós szám megtalálható lenne az a szám hatványai között, ha nem csak ez egész, hanem bármilyen kitevőkre is kiszámítanánk a táblázatot (bármely $a \in \mathbb{R}^+$ alap esetén):

3. Tétel. *Bármely* $0 < a$, $a \neq 1$ *szám esetén az* a^x *hatványok* ($x \in \mathbb{R}$) *között minden pozitív valós* y *szám előfordul, azaz minden* y *pozitív valós számhoz létezik olyan* x *valós szám, amelyre* $a^x = y$. *Röviden:*

$$\left(\forall y \in \mathbb{R}^+\right) \ (\exists x \in \mathbb{R}) \quad a^x = y \ . \tag{9}$$

Természetesen a (9) egyenlőségben keresett x a legtöbb esetben nem egész szám, például (8) esetében $y = 2.7202$, $x = 10\,007.55441...$ és persze $a = 1.0001$.
(A fenti 3.Tételt ne tévesszük össze az 1.Tétellel!)

Mellesleg, a Táblázatban a "logaritmusok" (kitevők) *számtani*-, a **numeruszok** (hatványok) pedig *mértani*- sorozatot alkotnak, ez összhangban van az (5) azonosságokkal.

A Logaritmus

Az előző fejezetben lényegében már definiáltuk (és talán már meg is értettük) a **logaritmus** (eredetileg *log-aritmosz*) fogalmát: a 3.Tétel és a (9) egyenlőség alapján az y számot "előállító" x *kitevőt* hívjuk az y szám logaritmusának - ez a tankönyvekben található Definíció is:

4. Definíció. *Bármely pozitív* a, y , $a \neq 1$ *számok esetén* $\log_a(y)$ *azt az* x *kitevőt (valós számot) jelöli, amelyre*

$$a^x = y \ . \tag{10}$$

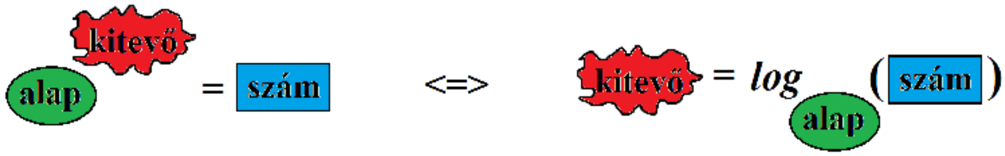
Tehát:

$$\boxed{a^x = y \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x = \log_a(y) \ .} \tag{11}$$

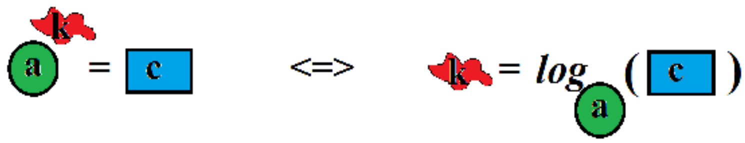
Hangsúlyozom, hogy a *logaritmus* szó *kitevőt* jelent (latimul-görögül), hiszen a fenti definíció lényege is ez (így kezdődik): " $\log_a(y)$ az x kitevő ... " . Én legszívesebben *kitevőt* mondanék magyarul mindig a *logaritmus* szó helyett (ugyanúgy, mint Apfel vagy apple helyett mi ugye almát eszünk):

$$\boxed{a^x = y \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x = \text{kitevő}_a(y) \ .} \tag{12}$$

Szívesen szemléltetem a (11) vagy (12) képleteket "felhőkkel" (azaz homályos, bonyolult képletekkel): csak három mennyiség cserél helyet, mint három társasjáték bábu:



vagy rövidebben:



Néhány hasznos példa:

$\log_2(2^3) = 3$,

$\log_2\left(2^{3+\sin(x/y)\cdot 4}\right) = 3 + \sin(x/y) \cdot 4$, hiszen éppen ez a kitevő !

Sőt általában:

$$\log_2\left(2^{blablabla}\right) = blablabla \quad \text{és} \quad \log_{\mathbf{a}}\left(\mathbf{a}^{blablabla}\right) = blablabla \ , \tag{13}$$

hiszen csak a kitevőt kell lemásolnunk!

Megfordítva:

$$3^{\log_3(4)} = 4 \ . \tag{14}$$

Hogy miért? Gondoljuk csak meg: a " $\log_3(4)$ " a kitevőt jelöli (azt, amire " 3 -at felemelve 4 -et kapunk"). DE ezt a *kitevőt* épp a *helyére* raktuk: fel a 3 tetejére, tehát még szép, hogy 4 -et kapunk.

Hasonlóan

$$3^{\log_3(blablabla)} = blablabla \quad \text{és} \quad \mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}}(blablabla)} = blablabla \ . \tag{15}$$

Ne feledjük tehát: a *log* kitevőt jelöl, ami a hatványban ott jobbra fent $\nearrow$ csücsül!

Most jön a lényeg:

Ezentúl (legtöbbször), ha bármilyen számmal találkozunk, nézzük meg "igazi valóságában", tehát hatvány alakban kell rá tekintenünk (persze előtte rögzítettük az a alapot). Például 8 helyett én már 2^3 -t látok, ezért könnyen kitalálom, hogy $\log_2(8) = 3$.

Hasonlóan, a 10 számot is valami $2^{???}$ hatványnak kell elképzelnünk! ("Kicsomagoljuk a 10 feliratú dobozt - és milyen alkatrészeket látunk benne?") Jó, de 2 -nek melyik hatványa 10 ? Nyilván 3 és 4 között, a monotonitási 2.Tétel **(@)** alapján, hiszen $2^3 = 8 < 10$ és $2^4 = 16 > 10$. A zsebszámológép segít a kitevő megtalálásában:

$$\log_2(10) = 3.321928095... , \tag{16}$$

ami azt jelenti, hogy 10 valójában ("álruhája alatt") $2^{3.321928095...}$, és valóban:

$$2^{3.321928095...} = 10 . \tag{17}$$

Bocs, hogyan is számoltuk ki az előbb **zsebszámológéppel** $\log_2(10)$ értékét? Mert csak lg és ln gomb van rajta, $\log_2$ nincs! Nos, ehhez fejben kell tartanunk a következő képletet: tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$ pozitív valós számokra

$$\boxed{\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)} .} \tag{18}$$

Mit is mond (mire jó) ez a képlet? Ha *csak b* alapú logaritmust tudunk kiszámolni, akkor egy osztással máris áttérhetünk *bármilyen* más (a) alapú logaritmusra!

Hogyan lehet megjegyezni ezt a képletet? <u>Osztás</u> - ezt meg kell jegyeznünk. $\log_b$ van a számlálóban és a nevezőben, hiszen csak azt tudjuk kiszámolni. Mivel c kicsit *feljebb* van, mint a , ezért kerül $\log_b(c)$ a számlálóba és $\log_b(a)$ a nevezőbe!

Tehát az előbb, (16) kiszámításakor a következőt "ütöttük be" a zsebszámológépbe: $\lg(10) / \lg(2) =$, és a gép válasza volt 3.321928095... .

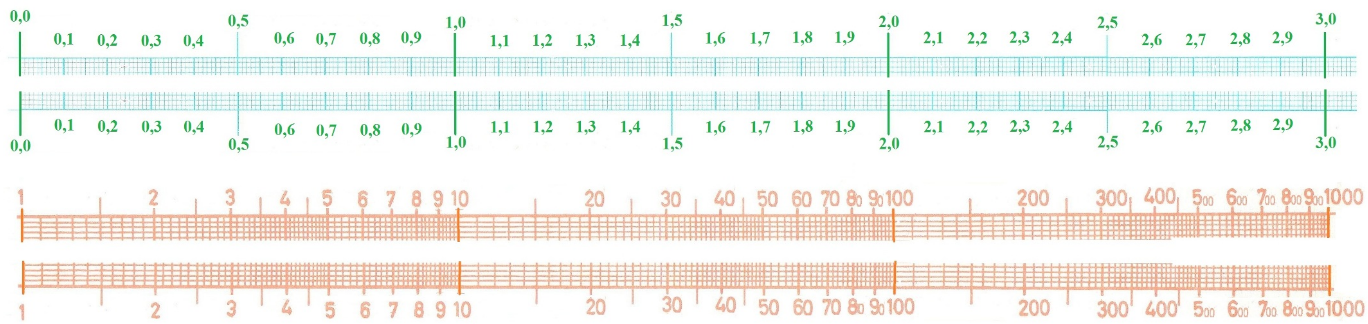
Még egy kis apróság: a 10 alapú logaritmus rövidítésére csak néhány országban (nálunk is) használják a lg jelölést, a számítástechnikában és nyugaton sokszor a log jelölést használják, néha pedig - hogy izgalmasabb legyen - a "*természetes alapú*" ln vagyis $\log_e$ függvényt jelölik a log jellel[6]. Ellenőrizzük mindig, hogy az adott könyvben / számítógép-programban a log jelek pontosan milyen alapú logaritmusokat jelölnek!

Most megint lényeg jön:

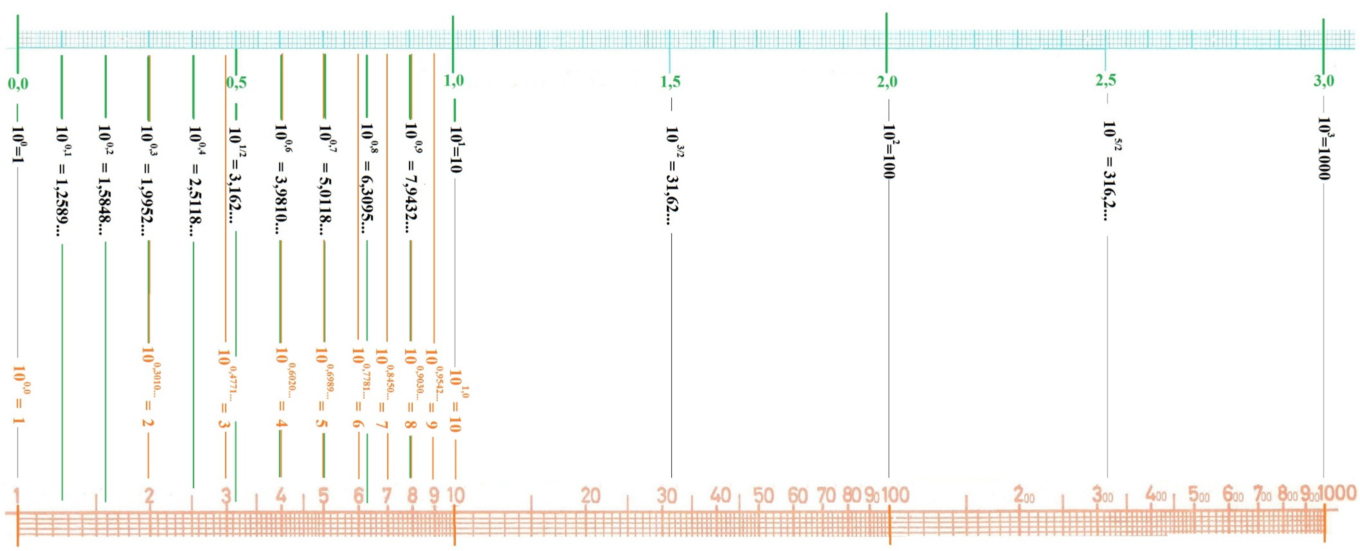
Ha pedig, egy másik feladatban 7 hatványaival foglalkozunk, akkor ugyanazt a 10 -et már máshogyan látjuk: a zsebszámológép segítségével $\log(10) / \log(7) =$ 1.183294662... , vagyis 10 helyett $7^{1.183294662...}$ -et kell látnunk (elképzelnünk)!

[6]) = "*logaritmosz naturalis*", mert a matematikában és a mérnöki tudományokban e és ln sokszor kényelmesebb, mint $\log_{10}$ vagy $\log_2$

Végül még egy kis szemléltetés: a zöld skálákon a kitevők , a narancsszínű skálákon pedig a 10 alapú hatványok látszanak. A hatvány-skálákat kissé összenyomtuk: minden számot a saját kitevője alá írtunk.



és



Felhasználás

Számítsuk ki először a Táblázat segítségével az $\mathbf{1.396 \cdot 2.746}$ szorzatot. A táblázatban megkeressük az 1.396 és 2.746 (fekete) számok mellett álló piros kitevőket: 3 336 és 10 102 , vagyis $a^{3\ 336} = 1.396$ és $a^{10\ 102} = 2.746$, vagy kedvenc logaritmusunkkal: $3\ 336 = \log_a(1.396)$ és $10\ 102 = \log_a(2.746)$ (most $a = 1.0001$). Majd egyszerűen csak összeadjuk a két egész számot: $3\ 336 + 10\ 102 = 13\ 438$, és az (5) azonosság alapján már tudjuk is a végeredményt: $a^{13\ 438}$, hiszen

$$1.396 \cdot 2.746 = a^{3\ 336} \cdot a^{10\ 102} = a^{13\ 438}\ . \tag{19}$$

Vegyük észre, hogy az $a^{13\ 438}$ végeredmény már ott vár ránk a Táblázat-könyv következő oldalán (sajnos nem az 1.Táblázatban): csak meg kell keresnünk a piros 13 438 szám melletti fekete számot: **3.833** . És valóban, ellenőrizhetjük zsebszámológéppel: $1.396 \cdot 2.746 \approx 3.833$.

Az 2.746/1.396 *osztás* hasonlóan egyszerű a Táblázat segítségével: mindössze csak a $10\ 102 - 3\ 336 = 6\ 766$ különbséget kell kézzel kiszámolnunk, és Táblázatban (könyvben) már látjuk is a 6 766 szám mellett a végeredményt: **1.967** . (Emlékezzünk vissza általános iskolai éveinkre: az osztás papíron ceruzával mennyivel nehezebb, mint a szorzás!)

A Táblázat használata kicsit bonyolultnak tűnik de kis gyakorlás után már majdnem olyan gyors, mint a zsebszámológép. De ötszáz évvel ezelőtt ilyen gép még nem volt, és számolni (osztani, szorozni) rengeteget kellett - mérnököknek, csillagászoknak, hajósoknak, stb. Mivel a Könyvekben nem csak 3, hanem 8 tizedesjegyre számoltak, a fekete számok pedig 1-től millióig szerepeltek, ezért a zsebszámológépek szinte nem is hiányoztak ötszáz évvel ezelőtt.

A *Középiskola Függvénytáblázatok* könyvben kicsit részletesebb logaritmustáblázatot találunk, mint a fenti 1.Táblázat.

Bár a logaritmustáblázatokat a XXI. században már nem használják szorzásosztásra, a fenti módszert még is érdemes megismernünk, mert segítségével a *Logaritmus* ("lóg-a-ritmus") nevű mumust talán jobban megismerjük, már kevésbé félünk tőle.