Haladvány Kiadvány 2018.01.02

Egy prímszám érdekes tulajdonságai

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Kivonat.

Ebben a dolgozatban az 52579 prímszám néhány érdekes tulajdonságát mutatjuk meg. Ez a prímszám úgy köthető az új esztendő sorszámához, 2018-hoz, hogy

$$20^{18} - 2^{018}$$

egyik prímtényezője.

Bevezetés.

Mivel 52579 prím, azért a híres kis Fermat-tétel szerint $10^{52578}-1$ osztható 52579-cel. A legkisebb k egész szám, melyre 10^k-1 osztható 52579-cel, a $k=18$. Mármost

$$\frac{10^{18}-1}{52579}=\frac{999999999999999999}{52579}=19018999980981$$

A kis Fermat-tétel szerint $10^{18}-1$ osztható 19-cel is. Mindazonáltal $10^{18}-1$ ilyen érdekes alakú számok szorzatára bontható:

$$10^{18}-1=999001\cdot 999999\cdot 1001001$$

Itt

$$\begin{aligned} 999001 &= 19 \cdot 52579 \\ 999999 &= 999 \cdot 1001 \\ 1001001 &= 3 \cdot 333667 \end{aligned}$$

Mármost

$$\frac{10^{18}-1}{52579} = 19018999980981$$

miatt

$$\frac{1}{52579} = 0.0000190189999809810190189999809 81\ldots$$

A tizedes tört ismétlődő szakasza:

$$019018999980981$$

Megállapíthatjuk, hogy 52579 reciprokának tizedes tört alakjában csak a $0, 1, 8, 9$ számjegyek fordulnak elő.

Fő eredmény.

Tétel. Ha m pozitív egész és relatív prím 6-hoz, akkor

$$N_m = \frac{10^{6m} - 10^{3m} + 1}{52579}$$

egész szám.

Bizonyítás. A tétel első állításánál erősebbet bizonyítunk, nevezetesen megmutatjuk, hogy $N_m/19$ is egész szám. Az $m = 1$ eset triviális, mert

$$\frac{N_1}{19} = \frac{10^6 - 10^3 + 1}{19 \cdot 52579} = 1$$

A továbbiakban feltehetjük, hogy $m > 1$. Mivel m relatív prím 6-hoz, ezért $m = 6k + 1$ vagy $m = 6k - 1$ valamely pozitív egész k-ra

Most tekintsük pozitív egész k-ra a következő képletet, melyről kiderül majd, hogy egészegyütthatós polinom:

$$p_k(x) = \frac{x^{12k+2} - x^{6k+1} + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$
\begin{aligned}
p_k(x) &= \frac{x^{12k+2} - x^{6k+1} + 1}{x^2 - x + 1} - x^{6k} + x^{6k} \\
&= \frac{x^{12k+2} - x^{6k+1} + 1 - x^{6k+2} + x^{6k+1} - x^{6k}}{x^2 - x + 1} + x^{6k} \\
&= \frac{x^{12k+2} + 1 - x^{6k+2} - x^{6k}}{x^2 - x + 1} + x^{6k} \\
&= \frac{\left(x^{6k} - 1\right)\left(x^{6k+2} - 1\right)}{x^2 - x + 1} + x^{6k} \\
&= \frac{\left(x^{6k} - 1\right)(x^6 - 1)\left(x^{6k+2} - 1\right)}{(x^6 - 1)\left(x^2 - x + 1\right)} + x^{6k} \\
&= \frac{x^{6k} - 1}{x^6 - 1} \cdot \frac{x^6 - 1}{x^2 - x + 1} \cdot \left(x^{6k+2} - 1\right) + x^{6k} \\
&= \frac{x^{6k} - 1}{x^6 - 1} \cdot \left(x^4 + x^3 - x - 1\right) \cdot \left(x^{6k+2} - 1\right) + x^{6k}
\end{aligned}
$$

Mivel

$$\frac{x^{6k}-1}{x^6-1} = x^{6k-6} + x^{6k-12} + \cdots + x^6 + 1$$

ezért

$$p_k(x) = \left(x^{6k-6} + x^{6k-12} + \cdots + 1\right)\left(x^4 + x^3 - x - 1\right)\left(x^{6k+2} - 1\right) + x^{6k}$$

Tehát $p_k(x)$ egész együtthatós polinom, sőt minden együtthatója 0, 1 vagy -1.

Hasonló módon a

$$q_k(x) = \frac{x^{12k-2} - x^{6k-1} + 1}{x^2 - x + 1}$$

kifejezésről is kiderül, hogy egészegyütthatós polinom:

$$\begin{aligned}
q_k(x) &= \frac{x^{12k-2} - x^{6k-1} + 1}{x^2 - x + 1} - x^{6k-2} + x^{6k-2} \\
&= \frac{x^{12k-2} - x^{6k-1} + 1 - x^{6k} + x^{6k-1} - x^{6k-2}}{x^2 - x + 1} + x^{6k-2} \\
&= \frac{x^{12k-2} + 1 - x^{6k} - x^{6k-2}}{x^2 - x + 1} + x^{6k-2} \\
&= \frac{\left(x^{6k} - 1\right)\left(x^{6k-2} - 1\right)}{x^2 - x + 1} + x^{6k-2} \\
&= \frac{\left(x^{6k} - 1\right)\left(x^{6} - 1\right)\left(x^{6k-2} - 1\right)}{\left(x^{6} - 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)} + x^{6k-2} \\
&= \frac{x^{6k} - 1}{x^6 - 1} \cdot \left(x^4 + x^3 - x - 1\right) \cdot \left(x^{6k-2} - 1\right) + x^{6k-2}
\end{aligned}$$

Tehát

$$q_k(x) = \left(x^{6k-6} + x^{6k-12} + \cdots + 1\right)\left(x^4 + x^3 - x - 1\right)\left(x^{6k-2} - 1\right) + x^{6k-2}$$

Most vegyük észre, hogy $x = 1000$ esetén $x^2 - x + 1 = 19 \cdot 52579$. Tehát

$$N_{6k+1}/19 = p_k(1000) \qquad\qquad N_{6k-1}/19 = q_k(1000)$$

Ezzel a tétel bizonyítást nyert.

Megjegyzés. A tételünkben szereplő N_m számokról nem csak az igaz, hogy egészek, hanem az is, hogy tízes szemrendszerben csak a $0, 1, 8, 9$ számjegyek fordulnak elő bennük. De ennek a ténynek a bizonyítását az olvasóra bízzuk.

Hivatkozások.

Wikipédia: *Kis Fermat-tétel*
https://hu.wikipedia.org/wiki/Kis_Fermat-t%C3%A9tel

Szalkai I. és Dósa Gy.: *Algoritmikus számelmélet*, Typotex, 2011, ISBN 978-963-279-523-2. http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0008_szalkai_dosa_szamelmelet