# Miért van a mátrixoknak inverze?

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2018.02.15.

**Kivonat**

Félcsoportokban a *bal*- és *jobb*oldali inverzek megegyeznek, DE csak akkor, ha mindkettő létezik. A MA'TRIXOKnál tanítjuk és tanuljuk, hogy bármelyik létezéséből következik a másik létezése, de ennek okát egyetlen könyvben sem találtam. Ezt a rejtélyt próbáltam megoldani az alábbi cikkben.

Haladvány Kiadvány, http://math.bme.hu/~hujter/180215.pdf

## 0. Bevezetés

**1. Jelölés.** *Az egységmátrixot* $I$ *-vel jelöljük, amit néha* $E$ *-vel is jelölnek.*

A félcsoportok elméletéből csak azt tudjuk, hogy:

**2. Tétel.** ***HA*** *egy* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(négyzetes) mátrixnak VAN jobboldali inverze* $X$ *(azaz* $AX = I$*)* ***ÉS*** ***HA*** *VAN jobboldali inverze* $Y$ *(azaz* $YA = I$*)* ***AKKOR*** $X = Y$ *kétoldali inverze* $A$ *-nak és* $A$ *inverze egyértelmű, tehát* $A^{-1} = X = Y$ *.* $\square$

Azonban mitől van az, hogy egy MA'TRIXNAK, HA van egyik oldali inverze, AKKOR mindenképpen van másik oldali inverze is?

**3. Probléma.** *Legyen* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tetszőleges négyzetes mátrix.* ***Igaz-e,*** *hogy: HA van* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *amelyre* $AX = I$ *AKKOR van olyan* $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *is, amelyre* $YA = I$ *?*

Egyik ötletünk *transzponálás* művelete és az $(AB)^T = B^T A^T$ és $I^T = I$ összefüggések volt, de ezzel nem sikerült a kérdésre válaszolnunk.

# 1. $2 \times 2$ -es mátrixok

A Megoldás előtt számoljuk ki részletesen a $2 \times 2$ -es mátrixok inverzének feltételét (kérjük az Olvasó türelmét!).

Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ adott, és keresendők az $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ és $Y = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ mátrixok, illetve valós számok.

$X$ pontosan akkor létezik, ha az alábbi egyenletrendszereknek *létezik* (akár több) megoldása:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ÉS

$$\begin{cases} ay + bu = 0 \\ cy + du = 1 \end{cases} \tag{2}$$

A négy egyenletet azért osztottuk két külön rendszerbe, mert $x, z$ csak (1)-ben, míg $y, u$ csak (2)-ben szerepel. Tehát elegendő külön-külön megoldanunk illetve elemeznünk (1)-t és (2)-t.

(1) első egyenletét $d$-vel, másodikat $b$-vel szorozva és kivonva kapjuk:

$$(ad - cb) \cdot x = d \ , \tag{3}$$

hasonlóan

$$(ad - cb) \cdot z = -c \ , \tag{4}$$

$$(ad - cb) \cdot y = -b \ , \tag{5}$$

és

$$(ad - cb) \cdot u = a \ . \tag{6}$$

Ha $(ad - cb) = 0$ akkor $a = b = c = d = 0$ , de ez ellentmond (1) és (2)-nek.

**TEHÁT:** *$X$ akkor és csak akkor létezik*, ha

$$ad - cb \neq 0 \ . \tag{7}$$

Ez ugyan jól ismert a determinánsok elméletéből, de mint láttuk, egészen elemi [általános iskolai] eszközökkel megkaptuk, és olvassunk csak tovább!

$Y$ pontosan akkor létezik, ha az *alábbi* egyenletrendszereknek *létezik* (akár több) megoldása:

$$\begin{cases} ap + cq = 1 \\ bp + dq = 0 \end{cases} \tag{8}$$

és

$$\begin{cases} ar + cs = 0 \\ br + ds = 1 \end{cases} . \tag{9}$$

Az első részhez hasonló átalakítások után kapjuk:

**TEHÁT:** $Y$ *akkor és csak akkor létezik*, ha

$$ad - cb \neq 0 . \tag{10}$$

Meglepődve tapasztaljuk, hogy (7) és (10) teljesen azonos(!) , vagyis**:** teljesen elemi eszközökkel *bebizonyítottuk*, hogy $X$ és $Y$ pontosan akkor létezik ha (7) azaz (10) teljesül. (A bevezetőben említettek miatt $X = Y$ és mindkettő egyértelmű.)

*Ez* volt a Megoldás! $\square$

## 2. $n \times n$ -es mátrixok

Tehát $2{\times}2$ -es mátrixokra teljesen elemi eszközökkel megoldottuk $X$ és $Y$ létezésének problémáját. Hasonlóan, "kicsit" több számolással belátható tetszőleges $n \times n$ -es $A$ mátrixra, hogy $X$ és $Y$ (külön-külön) pontosan akkor létezik, ha egy bonyolult, $A$ elemeiből képzett ((7)-re egyre kevésbé hasonlító) kifejezés $\neq 0$ . $\square$

Nos, épp ezt a bonyolult kifejezést hívjuk $\det(A)$ -nak - $A$ elemeiből *meghatározott* (determinált) mennyiségnek! Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy csak teljesen elemi eszközöket használtunk!

## 3. Végtelen mátrixok

Természetesen csak megszámlálható sort és osztlopot tartalmazó mátrixokkal foglalkozunk, vagyis $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ , a mátrixszorzásnál fel kell tennünk, hogy a $\sum\limits_{t=1}^{\infty} a_{j,t} \cdot b_{t,j}$ sorok konvergensek, aminek legegyszerűbb esete, ha $A$ és $B$ minden sora és oszlopa $\ell_2$ -beli sorozat.

Ez a struktúra szintén egységelemes félcsoport, a transzponálás is hasonló a véges esethez. Sajnos az (1) és társai egyenletrendszerek $\sum\limits_{t=1}^{\infty} a_{j,t} \cdot b_{t,j} = \delta_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ alakúak, amelyek megoldására még nem volt időnk.

Azonban ajánljuk az Olvasóknak Finta Béla [FB] kéziratát, amelyben végtelen (és véges) mátrixok inverzét az LU és QR felbontások segítségével meg tudja határozni.

# 4. Hivatkozások

[FB] **Finta Béla:** *Végtelen mátrixok* LU *felbontásáról és inverzeiről*, kézirat, 2018.