Haladvány Kiadvány 2018.02.18

Descartes és Segner tétele

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. Egy tömör bizonyítást adunk a *Descartes*-féle előjelszabályra, melyet először *Segner* bizonyított, de ez a bizonyítás nem terjedt ki az összes esetre.

Bevezetés. Manapság már közismert, hogy egy n-edfokú, valós együtthatós polinomnak legfeljebb n darab valós zérushelye lehetséges, és ha n páratlan, akkor legalább egy valós zérushely van. A polinomokat

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{1}$$

általános alakban fogjuk tekinteni, ahol az $a_0, \ldots, a_n$ sorozat tetszőleges valós számokból áll, de $a_n \neq 0$. Egy ξ valós számot zérushelynek nevezünk, ha $f(\xi) = 0$. Segner óta tudjuk, hogy $n \geq 1$ és $f(\xi) = 0$ esetén felírható az $f(x)$ polinom

$$f(x) = (\xi - x) g(x) \tag{2}$$

alakban, ahol alkalmas $b_0, \ldots, b_{n-1}$ valós számokra egyrészt $b_{n-1} \neq 0$, másrészt fennáll

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} \tag{3}$$

Multiplicitással úgy számoljuk a zérushelyeket, hogy $g(x)$ zérushelyeinek darabszámához hozzáadunk 1-et, hogy megkapjuk $f(x)$ zérushelyeinek a darabszámát. Az világos, hogy az $n = 1$ esetben 1 darab zérushely van, az $n = 2$ esetben pedig multiplicitással számolva vagy 0 darab, vagy 2 darab. Konkrétan, az $a_0 + a_1x + a_2x^2$ polinomnak az $a_2 \neq 0$ esetben akkor és csak akkor van 0 darab zérushelye, ha $a_1^2 < 4a_0a_2$. Ha $a_1^2 \geq 4a_0a_2$, akkor a másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint fel tudjuk írni a két zérushelyet:

$$\xi_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \qquad \xi_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

Az $n = 3$ eset keményebb dió! Ilyenkor a zérushelyek darabszáma vagy 1, vagy 3. *Scipione del Ferro* (1465–1526) képletéből tudjuk például, hogy ha $n = 3$ és ha valamely p, q pozitív számokra $a_0 = -2 \cdot \sqrt{q} < 0$, $a_1 = 3 \cdot \sqrt[3]{p} > 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, akkor egyetlen valós zérushely van:

$$\xi = \sqrt[3]{\sqrt{p+q} + \sqrt{q}} - \sqrt[3]{\sqrt{p+q} - \sqrt{q}}$$

Például a $-6 + 3x + x^3$ polinom egyetlen valós zérushelye: $\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} - \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$. A többi eset is kezelhető (még ha körülményesen is) az $n = 3$ és $n = 4$ értékekre, de $n \geq 5$ esetén megállt a tudomány a zérushelyek pontos kiszámítása illetve képletekkel való felírása tekintetében.

René Descartes (1596–1650) megfigyelte (de nem bizonyította), hogy az $f(x)$ polinom **pozitív zérushelyeinek darabszáma legfeljebb annyi**, mint ahányszor átlépünk az origó felett, ha az $a_0, \ldots, a_n$ sorozat elemeit a számegyenesen képzeljük el, és sorban lépkedünk köztük a_0-tól a_n-ig. Feltételezhetjük, hogy az általa ismert megoldóképletekre ellenőrizte is Descartes a megfigyelését. Például del Ferro képleténél az origó felett való átlépések darabszáma 1, és az egyetlen valós zérushely pozitív. Azt is észrevehette Descartes, hogy az $f(-x)$ polinom együtthatóinak előjelváltásait számolva az eredeti $f(x)$ polinom negatív zésushelyeinek (multiplicitással számolt) mennyiségére kapunk felső korlátot.

Segner János András (1704–1777) bizonyította Descartes megfigyelését, de Segner bizonyítása csak abban az esetben tekinthető teljesen korrektnek, ha az $f(x)$ polinomnak (multiplicitással számolva pontosan) n darab (valós) zérushelye van. Ilyen esetekben az a szám, ahányszor átlépünk az origó felett, megegyezik a pozitív zérushelyek számával. Azon lépesek darabszáma, amikor meg nem lépünk át az origó felett, megegyezik a negatív és nulla zérushelyek multiplicitással számolt darabszával. Az, hogy a 0 szám hányszoros multipliciással zérushely, könnyen kiolvasható az $a_0, \ldots, a_n$ sorozatból: ez a szám k, ha $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$, de $a_k \neq 0$.

Ebben a dolgozatban egy olyan bizonyítást adunk a Descartes-féle előjelszabályra (pontosabban annak egy kissé erősebb változatára), mely az összes esetre kiterjed, tehát azokra is, amikor a valós zérushelyek száma kevesebb, mint n. Felhasználjuk a hivatkozások között felsorolt munkák több ötletét.

Pontosítások. A továbbiakban $n \geq 1$. Ha $a_0, \ldots, a_n$ valós számok egy tetszőleges sorozata, akkor a sorozat egy előjelváltásán olyan (j, k) indexpárt értünk, melyre $j < k$, $a_j a_k < 0$, és $j < i < k$ esetén $a_i = 0$. Az előjelváltó indexpárok darabszámát így jelöljük: $\vee(a_0, \ldots, a_n)$. Nyilván $\vee(a_0, \ldots, a_n) \leq n$, és ha az $f(x)$ polinomnak van legalább egy pozitív zérushelye, akkor $1 \leq \vee(a_0, \ldots, a_n)$.

Most tetszőleges $a_0, \ldots, a_n$ és $b_0, \ldots, b_n$ valós számokra (ahol $n \geq 1$) írjunk fel egy egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_0 + a_1 \\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
b_{n-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\
b_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Segédtétel 1. *Ha $b_n = 0$ és $a_n \neq 0$ esetén fennáll a (4) egyenletrendszer, akkor $\vee(a_0, a_1, \ldots, a_n) - \vee(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ pozitív páratlan szám.*

A segédtételt a következő szakaszban fogjuk bizonyítani.

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokat értelmezzük ugyanúgy, mint fent. Tehát valós számok adott $a_0, \ldots, a_n$ sorozata, ahol $n \geq 1$ és $a_n \neq 0$, az (1) képlet szerint meghatározza az $f(x)$ polinomot, melynek egy adott ξ zérushelye mentén a (2) és (3) képletekkel meghatározza a $b_0, \ldots, b_{n-1}$ sorozatot.

Segédtétel 2. *Ha valamely pozitív ξ esetén*

$$f(x) = (\xi - x)g(x)$$

akkor $\vee(a_0, a_1, \ldots, a_n) - \vee(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ egy pozitív páratlan szám.

Ezt a segédtételt is a következő szakaszban fogjuk bizonyítani. Az utóbbi segédtételből már teljes indukcióval könnyen látható a következő tétel:

Tétel (Descartes-féle előjelszabály). *Az $f(x)$ polinom pozitív zérushelyeinek (multiplicitással számolt) darabszáma egy nemnegatív páros számmal kevesebb, mint $\vee(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.*

Az első segédtétel bizonyítása. Először tekintsük az $n = 1$ esetet. Ekkor tehát négy számunk van:

b_0	a_0
b_1	a_1

A segédtétel feltevései szerint ezeket tudjuk:

$b_0 \neq 0$	$a_0 = b_0 \neq 0$
$b_1 = 0$	$a_1 = -b_0 \neq 0$

Mindazonáltal $\vee(b_0, b_1) = 0$ és $\vee(a_0, a_1) = 1$, tehát $\vee(a_0, a_1) - \vee(b_0, b_1) = 1$, ami tényleg egy pozitív páratlan szám.

Most az $n = 2$ eset következik; ekkor már hat számunk van:

b_0	a_0
b_1	a_1
b_2	a_2

A segédtétel feltevései szerint ezeket tudjuk:

b_0	$a_0 = b_0$
$b_1 \neq 0$	$a_1 = b_1 - b_0$
$b_2 = 0$	$a_2 = -b_1 \neq 0$

Az fogjuk belátni most is, hogy minden esetben $\vee(a_0, a_1, a_2) - \vee(b_0, b_1, b_2) = 1$. Először nézzük meg a $b_0 b_1 < 0$ esetet! Ekkor $\vee(b_0, b_1, b_2) = 1$ és $\vee(a_0, a_1, a_2) = 2$, és így készen vagyunk. Azután nézzük meg a $b_0 b_1 \geq 0$ esetet! Ekkor $\vee(b_0, b_1, b_2) = 0$ és $\vee(a_0, a_1, a_2) = 1$, és így is készen vagyunk.

Az első segédtétel bizonyításánál tehát már csak az $n \geq 3$ esetek vannak hátra. Indirekt módon tegyük fel, hogy van ellenpélda. Tekintsük és rögzítsük a lehető legkisebb n számot az ellenpéldákban. A minimalitás miatt az $a_0, \ldots, a_n$ sorozat egyetlen eleme sem 0, mert $a_i = 0$ esetén az a_i számokat és a b_i-re vonatkozó sort kihagyhatnánk az ellenpéldából, és egy kisebb ellenpéldát kapnánk. Ha a (4) képletből elhagyjuk a b_0-ra vonatkozó sort, akkor a maradékot így írhatjuk:

$$\begin{aligned}
b_1 &= (a_0 + a_1) \\
b_2 &= (a_0 + a_1) + a_2 \\
&\vdots \\
b_{n-1} &= (a_0 + a_1) + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\
b_n &= (a_0 + a_1) + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Ezért $\vee(a_0 + a_1, a_2, \ldots, a_n) - \vee(b_1, b_2 \ldots, b_{n-1})$ egy pozitív páratlan szám, mert máskülönben kisebb ellenpéldát kapnánk. Tekintsük a következő számokat:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \vee(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) - \vee(a_0 + a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
\beta &= \vee(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) - \vee(b_1, b_2, \ldots, b_n)
\end{aligned}$$

Az indirekt feltevésünk miatt $\alpha - \beta$ nem lehet egy nemnegatív páros szám. Márpedig úgy fogunk majd ellentmondásra jutni, hogy megmutatjuk, hogy $\alpha - \beta = 0$

vagy 2. Annyi világos, hogy $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ és $\beta \in \{0, 1)$. Tehát $\alpha = 1$ esetén a $\beta = 0$ lehetőséget kell kizárnunk, páros α esetén pedig a $\beta = 1$ lehetőséget. A feltételezett ellenpéldánkról az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a_0 = 1$. Tehát $b_0 = a_0 = 1$ és $b_1 = a_0 + a_1 = 1 + a_1$.

Tegyük fel először, hogy $\beta = 0$; ezért $b_1 \geq 0$; azaz $a_0 + a_1 \geq 0$. Most akár $a_2 > 0$ esetén, akár $a_2 < 0$ esetén $\alpha \neq 1$.

Tehát $\beta = 1$; ezért $b_1 < 0$; azaz $a_0 + a_1 < 0$. Most akár $a_2 > 0$ esetén, akár $a_2 < 0$ esetén $\alpha = 1$.

Ezzel az első segédtétel bizonyítását befejeztük.

A második segédtétel bizonyítása. Mindenekelőtt azt vegyük észre, hogy

$$f(\xi x) = (\xi - \xi x)g(\xi x) = (1 - x)(\xi g(\xi x))$$

miatt $\vee(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és $\vee(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ változatlanok maradnak, ha az $f(x)$ polinom helyett az $f(\xi x)$ polinomból indulunk ki. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük tehát, hogy $\xi = 1$. Ekkor az $f(1) = 0$ és $f(x) = (1 - x)g(x)$ képletekből megkapjuk, hogy fennáll a (4) egyenletrendszer $b_n = 0$ választással. Tekintve a $b_n = 0$ miatti

$$\vee(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) = \vee(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$$

egyenlőséget, az első segédtétel alapján készen vagyunk a második segédtétel bizonyításával is.

Hivatkozások

1. A. A. Albert. An inductive proof of descartes' rules of signs. *Amer. Math. Monthly*, 50(3), March 1943.

2. X. Wang. A simple proof of Descartes' rules of signs. *Amer. Math. Monthly*, 111(6), June–July 2004.

3. V. Komornik. Another short proof of Descartes' rules of signs. *Amer. Math. Monthly*, 113(9), November 2006.

4. R. D. Arthan. Descartes' rule of signs by an easy induction. *arXiv manuscript*, October 2007.