Haladvány Kiadvány 2018.03.07

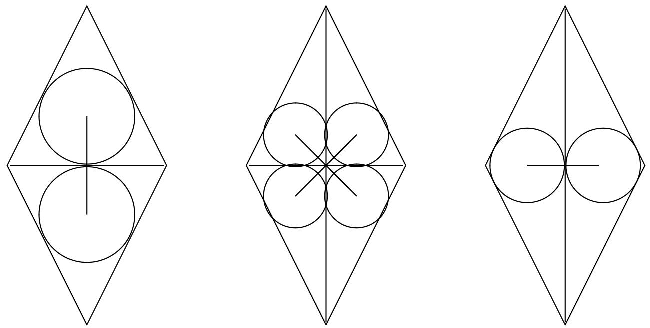
Három gyémánt tétele

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. A rombuszt angolul gyémántnak is nevezik. A rombuszt átlói háromszögekre bontják; ezekbe a háromszögekbe körök írhatók, és a körök középpontjainak távolságára vonatkoznak azok a tételek, melyeket a jelen dolgozatban bizonyítunk. Egy aszimmetrikus gyémántból szimmetrikus brilliáns csiszolható; a mi tételeink lényege is az, hogy aszimmetriából indulva meglepő új szimmetriákra lelünk.

Bevezetés és a tételek kimondása. Egy rombusz átlóival három féle háromszögre bontható attól függően, hogy vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkét átlót húzzuk be. A háromszögek beírt köre méret szerint három féle lehet; ezen három méret azonban érdekes módon összefügg: *a legnagyobb és a középső méretű méretű sugarak szorzata éppen a legkisebb sugár négyzetének a duplája.* Bizonyítani fogjuk a fenti állítást, amelynek egy olyan változatát is megadjuk, amikor egy aszimmetrikusnak ábra rejtett szimmetriája világlik ki. A fenti állítás egy átfogalmazása (ha a köröket egyazon rombuszban tekintjük): *a fent említett körök közül a négy legkisebb méretű kör középpontja által meghatározott rombusz (valójában egy négyzet) területe megegyezik a másik négy kör középpontja által meghatározott rombusz területével.* Egy másik átfogalmazása a fenti tételeknek: *egy rombuszba a fenti értelemben beírt nyolc kör közül méretre a legkisebb négy összterülete megegyezik a két legnagyobb kör összterülete és a két középső méretű kör összterülete mértani közepével.*



A három gyémánt ábrája a beírt körökkel. Tekintsünk három egybevágó rombuszt. Az elsőt bontsuk két háromszögre az egyik átlójával, a harmadikat bontsuk két háromszögre a másik átlójával, a középső rombuszt pedig bontsuk négy háromszögre mindkét átló behúzásával. Az így nyert nyolc darab háromszög mindegyikébe írjunk be egy-egy kört. A rombusz középpontjára szimmetrikus körpárok középpontjait kössük össze szakaszokkal: így nyerünk összesen négy szakaszt. A középső rombusz esetében a két szakasz nyilván egyenlő hosszú és merőlegesen felezi egymást.

Újabb átfogalmazások. Állítjuk: *a középső szakasz hossza éppen mértani közepe a két szélső rombuszban fellépő egy-egy szakasz hosszúságának.*

Jelölje p illetve q a két szélső rombuszban a beírt körök sugarát. Állítjuk: *a középső rombuszban a beírt körök sugara éppen* $\sqrt{pq/2}$.

A legutolsó állításunk nyilván úgy is fogalmazható, hogy a körök középpontjait összekötő, az ábrákba bejelölt szakaszok hossza az első rombuszban $2p$, a harmadikban $2q$, a középsőben pedig $2\sqrt{pq}$.

Bizonyítások. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a tekintett rombuszok területe éppen 2 egység. Az egyik átló hosszának felét jelölje d; ekkor a másik átló hosszának fele d^{-1}, a rombusz oldala pedig $\sqrt{d^2 + d^{-2}}$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $d \leq 1$, azaz hogy az első átló a rövidebb (pontosabban nem hosszabb) a két átló közül. Az első és a harmadik rombuszban a háromszögek területéből megkapjuk a következő összefüggéseket:

$$p\left(\sqrt{d^2+d^{-2}}+d\right)=1 \qquad q\left(\sqrt{d^2+d^{-2}}+d^{-1}\right)=1 \tag{1}$$

Ha a középső rombusz esetében a beírt körök sugarát r jelöli, akkor a háromszögek területét tekintve ezt nyerjük:

$$r\left(\sqrt{d^2+d^{-2}}+d+d^{-1}\right)=1$$

Bevezetve az $s=\frac{d}{2}+\frac{1}{2d}$ jelölést ezeket kapjuk:

$$d+d^{-1}=2s \qquad d^2+d^{-2}=4s^2-2$$

$$r\left(\sqrt{4s^2-2}+2s\right)=1$$

Az utóbbiból az adódik, hogy $s = \frac{1+2r^2}{4r}$, amiből pedig az, hogy

$$4s^2 - 2 = 4\left(\frac{1+2r^2}{4r}\right)^2 - 2 = \left(\frac{1-2r^2}{2r}\right)^2$$

azaz hogy

$$\sqrt{d^2 + d^{-2}} = \frac{1-2r^2}{2r}$$

mivel nyilván $2r < d \leq 1$.

Ugyanakkor s definíciójából és abból, hogy $0 < d \leq 1$, megkapjuk, hogy

$$d = s - \sqrt{s^2 - 1} \qquad\qquad d^{-1} = s + \sqrt{s^2 - 1}$$

Az (1)-beli egyenletek összeszorzásával ezt nyerjük:

$$
\begin{aligned}
\frac{4r^2}{pq} &= 4r^2\left(\sqrt{d^2+d^{-2}}+d\right)\left(\sqrt{d^2+d^{-2}}+d^{-1}\right)\\
&= 4r^2\left(\frac{1-2r^2}{2r}+s-\sqrt{s^2-1}\right)\left(\frac{1-2r^2}{2r}+s+\sqrt{s^2-1}\right)\\
&= 1+4r^4+4sr\left(1-2r^2\right)\\
&= 1+4r^4+(1+2r^2)\left(1-2r^2\right)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ebből a végeredmény: $r=\sqrt{pq/2}$. A fentiekben felsorolt állítások tehát bizonyítást nyertek.