Haladvány Kiadvány 2018.03.10

A hetedik törpe hazamehet

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

Ajánlás. Heppes Aladár tiszteletére 85. születésnapja alkalmából

Tartalmi összefoglaló. A háromdimeziós euklideszi térben vagyunk; a pontokat $(x; y; z)$ koordinátáikkal adjuk meg. Kiindulási halmazunk egy olyan S konvex zárt halmaz, mely tartalmazza a $(0; 0; \frac{1}{2})$ és a $(0; 0; \frac{-1}{2})$ pontokat, de bármely

két pontjának a távolsága legfeljebb egységnyi. *Heppes* és *Kuperberg* észrevették a jelen század elején, hogy ha $S' \subset S$ egy tetszőleges konvex zárt részhalmaz, mely nem tartalmazza mindkét fent megnevezett pontot, akkor S' lefedhető olyan $T_1, T_2, \cdots, T_7$ zárt halmazokkal, melyek egyikében sem lép fel egységnyi vagy nagyobb távolság két pont között, továbbá az T_j halmazok mindegyike a z-tengellyel párhuzamos szakaszoknak az úniója olyan értelemben, hogy minden egyenesen csak egy szakasz lehet. Az ilyen T_j halmazokat *törpe* névvel illetjük. A jelen dolgozatban azt bizonyítjuk, hogy a hetedik törpére nincs is szükség, hazamehet, mert már $T_1, T_2, \cdots, T_6$ is le tudja fedni az S' halmazt.

Bevezetés. A tartalmi összefoglaló szerint értve az S és S' halmazokat, az S' halmazban még előfordulhat egységnyi távolság. A konvexitásból következően minden olyan egyenes, mely párhuzamos a z-tengellyel, vagy üres halmazban, vagy egyetlen pontban, vagy pedig egy egységnyinél rövidebb szakaszban metszi az S' halmazt. De az S' halmazban még előfordulhatnak egységnyi távolságok. Definíció szerint az S' halmaz olyan részhalmaza *törpe*, melyben nincs egységnyi távolság, de minden olyan egyenes, amely a z-tengellyel párhuzamos és legalább két pontban metszi a törpe halmazt, annak a törpével való metszete egy zárt szakasz. Mindazonáltal a törpe halmazoknak nem kell sem zártnak, sem konvexnek lenni.

Tizenhárom éve Heppes és Kuperberg felsorakoztatott hét törpét, melyek együtt lefedik S'-t. Nekünk viszont elegendő lesz itt hat törpe is! Az első öt törpét lényegében ugyanúgy definiáljuk, mint Heppes és Kuperberg, a hatodikat azonban nagyobb körültekintéssel.

Konstrukció. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ pont nincs S'-ben; következésképpen az S' halmaz $(x;y;z)$ pontjaira teljesül, hogy $z \le \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ valamely alkalmas rögzített $N \ge 3$ egész számra. A $T_1 \subset S'$ halmazt úgy fogjuk definiálni, megválasztani, hogy $(x; y; z)$ pontjaira teljesüljön $x^2 + y^2 \le \frac{1}{N^2}$ és $\frac{-1}{2} \le z \le \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$. A T_1 halmaz valóban egy törpe, hiszen a benne fellépő legnagyobb távolság négyzete legfeljebb

$$\left(\frac{2}{N}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 = 1 - \frac{2N-5}{N^2} \quad < 1$$

Most tetszőleges α,β szögekre, ahol $-\pi \le \alpha < \beta \le \pi$ és $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$, definiáljuk a $Q[\alpha, \beta]$ jelölésű halmazt: azon $(x; y; z)$ pontok halmaza, melyekre van olyan

r és φ melyekre $r \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ és

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$
$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

Az világos, hogy mindegyik $Q\,[\alpha, \beta]$ olyan, hogy bármely, a z-tengellyel párhuzamos egyenes vagy elkerüli, vagy egyetlen pontban metszi, vagy egy szakaszban. Az is könnyen látható (és ezt már Heppes és Kuperberg is megállapították), hogy $S \subset Q\,[-\pi, \pi]$, továbbá ha tekintünk egy egységnyi szakaszt a $Q\,[\alpha, \beta]$ halmazban, akkor $\beta - \alpha \leq \frac{47\pi}{120}$ teljesülése esetén a szakasznak legalább az egyik végpontja szükségképpen a $(0;0;\frac{1}{2})$ és $(0;0;\frac{-1}{2})$ pontok valamelyike. Mindez azon múlik, hogy $\beta-\alpha\leq\frac{47\pi}{120}$ esetén $\cos(\beta-\alpha)>\frac{1}{3}$, ugyanis $\cos(\beta-\alpha)\leq\frac{1}{3}$ esetén a $Q\left[\alpha,\beta\right]$ halmazban lévő két legtávolabbi pont

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha;\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;0\right)\quad\text{és}\quad\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta;\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta;0\right),$$

mely pontok távolságának négyzete: $\frac{3}{2}(1-\cos\left(\beta-\alpha\right))$. Aki nem elégszik meg a közelítő számításokkal ennek ellenőrzésére, hogy $\beta-\alpha\leq\frac{47\pi}{120}$ esetén valóban $\cos\left(\beta-\alpha\right)>\frac{1}{3}$, annak ajánljuk a következő szép ismert képletet:

$$16\cos\frac{47\pi}{60}=\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{30}-\sqrt{20-\sqrt{80}}-\sqrt{60-\sqrt{720}}$$

Mármost $\cos(\beta-\alpha)\leq\frac{1}{3}$ esetén fennállna $\cos\frac{47\pi}{120}\leq\frac{1}{3}$, amiből következően fennállna $16\cos\frac{47\pi}{120}\leq16\left(2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-1\right)=\frac{-112}{9}$, tehát csak azt kell ellenőrizni, hogy

$$\frac{112}{9}+\sqrt{2}+\sqrt{10}>\sqrt{6}+\sqrt{30}+\sqrt{20-\sqrt{80}}+\sqrt{60-\sqrt{720}}$$

Hosszas, de kerekítési hiba nélküli számolással, többszöri négyzetre emeléssel és az egyenlőtlenség két oldalának az átrendezésével ez nehézségek nélkül igazolható. (Tájékoztatásul megemlítjük, hogy a bal oldal közelítőleg 17.021, a jobb oldal pedig közelítőleg 17.011.)

A fentieknek megfelelően a T_2, T_3, T_4, T_5 törpéket a

$$(S' \backslash T_1) \cap Q\left[\alpha_j, \beta_j\right]$$

képlettel definiáljuk, ahol az α_j, β_j értékeket a következő táblázat rögzíti:

$j =$	2	3	4	5
$\alpha_j =$	$-\pi$	$\frac{-73\pi}{120}$	$\frac{13\pi}{60}$	$\frac{73\pi}{120}$
$\beta_j =$	$\frac{-73\pi}{120}$	$\frac{-13\pi}{60}$	$\frac{73\pi}{120}$	π

Értelem szerint az utolsó törpe definíciója nem lesz más, mint

$$T_6 = (S' \backslash T_1) \cap Q\left[\frac{-13\pi}{60}, \frac{13\pi}{60}\right]$$

Viszont bizonyítanunk kell, hogy T_6-ban nem léphet fel egységnyi távolság. A nehézséget az jelenti, hogy $\cos\frac{13\pi}{30} < \frac{1}{3}$ miatt a $Q\left[\frac{-13\pi}{60}, \frac{13\pi}{60}\right]$ halmazban felléphet egységnél nagyobb távolság.

A hatodik lefedő halmaz törpesége. Adott u, v valós számokra tekintsük azoknak az $(x; y; z)$ pontoknak a halmazát, melyekre teljesülnek ezek:

$$(x-u)^2+(y-v)^2 \leq \frac{1}{3}$$
$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$
$$x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

Egy ilyen halmazok jelölése legyen $C_{u,v}$. Először belátjuk, hogy legalább egy $C_{u,v}$ tartalmazza S-et, hiszen ha nem lenne ez így, akkor lenne olyan legkisebb $\varepsilon > 0$, melyre lenne legalább egy olyan halmaz, mely halmaz $(x; y; z)$ pontjaira fennáll

$$(x-u)^2+(y-v)^2 \leq \frac{1}{3}+\varepsilon$$
$$z^2 \leq \frac{1}{4}$$

és ez az utóbbi halmaz tartalmazná az S halmazt. Rögzítve egy ilyen halmazhoz tartozóan az u, v számokat, és az S halmaz merőlegesen vetítve az x- és y-tengelyek síkjára találnánk két vagy három pontot $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, illetve $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ koordinátákkal, hogy ezen pontokat tartalmazó legkisebb kör sugara $\sqrt{\frac{1}{3} + \varepsilon}$ lenne, továbbá az $(x_j; y_j)$ pontok mindegyikéhez lenne legalább egy-egy olyan z_j, hogy az $(x_j; y_j; z_j)$ pontok mind az S halmazban lennének. Mivel a kör sugara $\sqrt{\frac{1}{3} + \varepsilon}$, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ távolsága legalább $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \varepsilon} = \sqrt{1 + 3\varepsilon} > 1$. Ez pedig ellentmondás, hiszen S-ben bármely két pont távolsága legfeljebb egységnyi, és a merőleges vetületben is fenn kell állni ennek.

Van tehát legalább egy $C_{u,v}$, mely tartalmazza S-et. Az általánosság korlátozása nélkül – ha szükséges, akkor a z tengely körüli forgatás révén – feltehetjük, hogy

$u \leq 0$ és $v = 0$. Most rögzítünk egy ilyen u-t. Tehát $S \subseteq C_{u,0}$. Mivel a $(0; 0; \frac{1}{2})$ és $(0; 0; \frac{-1}{2})$ pontok is S-ben vannak, ezért $\frac{-1}{\sqrt{3}} \leq u \leq 0$.

A jelen dolgozat kulcsfonosságú állítása, hogy T_6 nem tartalmaz egységnyi hosszúságú vagy hosszabb szakaszt. Ennél egy kicsit erősebben azt fogjuk megmutatni, hogy a

$$D_u = C_{u,0} \cap Q\left[\frac{-13\pi}{60}, \frac{13\pi}{60}\right]$$

halmaz csak olyan legalább egységnyi hosszúságú szakaszokat tartalmazhat, melyeknek legalább az egyik végpontja $(0; 0; \frac{1}{2})$ vagy $(0; 0; \frac{-1}{1})$. Mármost ha u értékét növeljük az $u \leq 0$ feltétel betartása mellett, akkor $\frac{13\pi}{60} < \frac{\pi}{2}$ miatt a D_u halmaz csak bővebb lehet, szűkebb nem. Ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $u = 0$.

Tekintsünk tehát egy feltételezett, lehető leghosszabb, legalább egységnyi hosszúságú szakaszt D_0-ból; a végpontokat jelölje $(x_1; y_1; z_1)$ és $(x_2; y_2; z_2)$. Ha ezen két pont közül legalább az egyik $(0; 0; \frac{1}{2})$ vagy $(0; 0; \frac{-1}{2})$, készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy $x_1 y_1 \neq 0$ és $x_1 y_1 \neq 0$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük még azt is, hogy $z_1 \leq 0$, hiszen $z_1 > 0$ esetén tükrözhetnénk az x- és y-tengelyek síkjára.

Heppes és Kuperberg észrevétele alapján az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy

$$(x_1; y_1; z_1) \in Q\left[\frac{-13\pi}{60}, \frac{-7\pi}{40}\right] \qquad (x_2; y_2; z_2) \in Q\left[\frac{7\pi}{40}, \frac{13\pi}{60}\right]$$

mert különben az egész szakasz beleférne egy $Q[\alpha, \beta]$ halmazba is, ahol $\beta - \alpha \leq \frac{47\pi}{120}$. Itt a $\frac{-7\pi}{40}$ szög úgy jött ki, mint $\frac{13\pi}{60} - \frac{47\pi}{120}$. A szakaszunk maximális hossza miatt az $(x_1; y_1; z_1)$ pontnak az x- és y-tengelyekre merőleges

$Q\left[\frac{-13\pi}{60}, \frac{-13\pi}{60}\right]$ síklap és az $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ egyenletű hengerfelület metszetén kell lennie, az $(x_2; y_2; z_2)$ pontnak pedig az $(x_1; y_1; z_1)$ tükörképének kell lennie az x-tengelyre. Következésképpen a két pont legalább egységnyi távolságából adódóan $y_1^2 + z_1^2 \geq \frac{1}{4}$, továbbá

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{-13\pi}{60} \qquad\qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{-13\pi}{60}$$

Mármost a maximális szakaszhosszból adódó $x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ és $z_1 \leq 0$ miatt $z_1 = \frac{3-2\sqrt{6}}{6}$. Mindazonáltal

$$\frac{1}{4} \leq y_1^2 + z_1^2 = \frac{\sin^2 \frac{-13\pi}{60}}{3} + \left(\frac{3 - 2\sqrt{6}}{6}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy T_6 valóban törpe. A fenti jobb oldali egyenlőtlenség pontos bizonyításához arról kell meggyőződni, hogy $\sin^2 \frac{13\pi}{60} < \sqrt{6} - 2$, hiszen

$$\frac{\sqrt{6}-2}{3}+\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Elegendő tehát arról megbizonyosodni, hogy $\cos\frac{13\pi}{30}>5-2\sqrt{6}$, mert

$$\cos\frac{13\pi}{30}=1-2\sin^2\frac{13\pi}{60}\quad\text{és}\quad 1-2\left(\sqrt{6}-2\right)=5-2\sqrt{6}$$

Mármost elgendő azt belátni, hogy $\cos\frac{13\pi}{15}>97-40\sqrt{6}$, mert

$$\cos\frac{13\pi}{15}=2\cos^2\frac{13\pi}{30}-1\quad\text{és}\quad 2\left(5-2\sqrt{6}\right)^2-1=97-40\sqrt{6}$$

Máskülönben $\cos\frac{13\pi}{15} = -\cos\frac{2\pi}{15}$ és

$$\begin{aligned} 8\cos\frac{2\pi}{15} &= 8\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right) \\ &= 8\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{5} + 8\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{5} \\ &= 1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - \sqrt{180}} \end{aligned}$$

Tehát csak azt kell belátni, hogy

$$8\left(40\sqrt{6} - 97\right) > 1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - \sqrt{180}}$$

Ez pedig hosszas, de kerekítési hiba nélküli számolással nehézségek nélkül könnyen ellenőrizhető négyzetre emelésekkel és átrendezésekkel.

Utólagos megjegyzések. A szerző és Heppes Aladár személyes beszélgetésein csak abban történt megegyezés, hogy a szükséges törpék száma legalább négy.

Meglepő módon Heppes még azt is elképzelhetőnek tartja, hogy négy törpe elegendő abban az esetben, ha az S halmaz sima felületű oly értelemben, hogy minden határponthon át egyértelmű támaszfélsík vehető fel, és a támaszfélsík normálvektora folytonosan differenciálható az S halmaz határán. Bár abból következően, hogy Heppes Aladár több mint hat évtizeddel ezelőtt elért kapcsolódó eredményeinek mindmáig csak csekélyke javíthatósága derült ki, Heppes rendkívül derülátónak látszik. A jelen dolgozat eredményei azonban jó eséllyel javíthatók lehetnek; például sima felületű S esetében még a hatodik törpe is hazaküldhető lehet.

Sejtés. *A törpék minimális száma öt.*

Hivatkozások.

Heppes A., Térbeli ponthalmazok felosztása kisebb átmérőjű részhalmazok összegére, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **7** (1957) 413–416.

Heppes A., Állandószélességű síkgörbék egy jellemzése, *Matematikai Lapok* **10** (1959) 133–135.

A. Heppes and W. Kuperberg, Cylindrical partitions of convex bodies, *Combinatorial and Computational Geometry* **52** (2005) 399–407.