Haladvány Kiadvány 2018.03.12

Segner-számok mint Fourier-együtthatók

Hujter Mihály
`hujter.misi@gmail.com`

Ajánlás. Segner halálának 240. és Fourier születésének 250. évfordulójára

Tartalmi összefoglaló. Megmutatjuk, hogy a *Segner-számok* (melyek tévesen *Catalan* nevét hordják) kezdő együtthatók speciális függvények *Fourier*-sorában.

Bevezetés. A következő számok *Catalan* belga matematikus nevét viselik, pedig *Segner András János* más sokkal korábban feltalálta azokat, és jelentőségüket is felismerte: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, ... A híres *Pascal-háromszög*ben minden második sorban a két legnagyobb szám különbségéről van szó: $1-0$, $2-1$, $6-4$, $20-15$, ...

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{(0)} & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & \mathbf{20} & & \mathbf{15} & & 6 & & 1 & \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

A *Fourier-sorok* elméletében közismert, hogy minden pozitív páratlan egész n esetében vannak olyan $b_1, b_3, \cdots, b_n$ racionális számok (és ezek egyértelműek), melyekre

$$\sin^n x = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx$$

Sőt az is ismert, hogy $b_n = 2^{1-n}$ illetve $b_n = -2^{1-n}$ attól függően, hogy n maradéka 4-gyel osztva 1 illetve 3. Következésképpen bevezetve az $S_n(x) = 2\sin nx$ (ha $n = 1, 3, 5, \ldots$), $S(x) = S_1(x)$ jelöléseket, pozitív páratlan egész n esetében vannak olyan $d_{n,1}, d_{n,3}, \cdots, d_{n,n-2}$ racionális számok (és ezek egy értelműek), melyekre

$$\frac{S^n(x) - S_n(x)}{2n} = b_{n,1} \sin x + b_{n,3} \sin 3x + \cdots + b_{n,n-2} \sin(n-2)x \quad (1)$$

illetve

$$\frac{S^n(x) + S_n(x)}{2n} = b_{n,1} \sin x + b_{n,3} \sin 3x + \cdots + b_{n,n-2} \sin(n-2)x \quad (2)$$

attól függően, hogy n maradéka 4-gyel osztva 1 vagy 3.

Állítás. *A* $b_{1,1}$, $b_{3,1}$, $b_{5,1}$, *... együtthatók a Segner–Catalan-számok:* 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

Bizonyítás. Az $n = 3$ eset könnyű, hiszen

$$\frac{2^3 \sin^3 x + 2 \sin 3x}{2 \cdot 3} = \sin x$$

Hasonlóképpen az $n = 5$ eset is kész, mert

$$\frac{2^5 \sin^5 x - 2 \sin 5x}{2 \cdot 5} = 2 \sin x - \sin 3x$$

Az általános esetekhez fel fogjuk használni az ismert képletet, mely szerint ha k nemnegatív egész szám, akkor

$$\frac{2^{2k-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2k} x \; dx = \binom{2k}{k}$$

A Fourier-sorok elmélete ismert összefüggései alapján

$$b_{n,1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S^n(x) - S_n(x)}{2n} \cdot \sin x \; dx$$

illetve

$$b_{n,1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S^n(x) + S_n(x)}{2n} \cdot \sin x \; dx$$

attól függően, hogy n maradéka 1 illetve 3. Tekintettel arra, hogy $n = 3, 5, 7, \ldots$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin x \; dx = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$b_{n,1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S^n(x)}{2n} \cdot \sin x \; dx$$

azaz

$$b_{n,1} = \frac{2^{n-1}}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{n+1} x \; dx$$

A fentiek alapján $n = 2k-1$ esetére azt nyerjük, hogy

$$b_{2k-1,1} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Ismert, hogy a jobb oldali számok éppen a Segner–Catalan-számok.

Záró megjegyzések. Az (1) és (2) képletek alapján a $\frac{\sin nx}{\sin x}$ függvényeket ki tudjuk fejezni a $\sin^2 x$ függvények polinomjaként. Például

$$\frac{2^3 \sin^3 x + 2 \sin 3x}{2 \cdot 3} = \sin x$$

miatt

$$\frac{2^3 \sin^2 x + 2\frac{\sin 3x}{\sin x}}{2 \cdot 3} = 1$$

amiből

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x$$

Másrészt

$$\frac{2^5 \sin^5 x - 2\sin 5x}{2 \cdot 5} = 2\sin x - \sin 3x$$

miatt

$$\frac{2^5 \sin^4 x - 2\frac{\sin 5x}{\sin x}}{2 \cdot 5} = 2 - \frac{\sin 3x}{\sin x}$$

amiből

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5$$

Az ilyen képletek például az integrálszámításban hozhatnak sok hasznot.

Hivatkozások.

Wikipédia, Eugène Charles Catalan, 2018,
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Charles_Catalan`

Wikipédia, Catalan-számok, 2018,
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Catalan-sz%C3%A1mok`

Wikipédia, Segner János András, 2018,
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Segner_J%C3%A1nos_Andr%C3%A1s`

Wikipédia, Joseph Fourier, 2018,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier

Wikipédia, Fourier-sor, 2018,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Fourier-sor

Wikipédia, Pascal-háromszög, 2018,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Pascal-h%C3%A1romsz%C3%B6g