Haladvány Kiadvány 2018.04.16

# Segner kétharmados törvénye

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

**A cím magyarázata.** *J. A. Segner* (1704–1777) polihisztort a világ leginkább német tudósként ismeri, de ő saját magát *hungarus* származásúnak mondta. (A *segner* és *hungarus* szavak szokásos kiejtése: *zégner* illetve *hungarusz*.) Segner János András a Pozsony vármegyei Szentgyörgy városban született németajkú családba, alsó- és középiskoláit Pozsonyban, Győrben, Debrecenben végezte (az utóbbi két városban magyarul), 21 évesen már a jénai orvostudományi egyetemen tanult, 1730-ban megszerezve orvosi oklevelét Pozsonyban kezdett praktizálni, majd Debrecen városi orvosa lett. Aztán 1732-ben meghívták *Jéna* városába magántanárnak; később *Göttingen* illetve *Halle* egyetemén professzorkodott haláláig. Korának egyik legnagyobb tudósaként tartjuk számon; a később nagyhírűvé váló göttingeni matematikai kutatások elindítója volt.

A közelmúltban jelent meg *Kovács László* tudománytörténész tollából az [1] kötet, mely részletesen tárgyalja Segner vizsgálatait a Ludolf-féle számmal kapcsolatban. *Kölni Ludolf* (1540–1610) vívómestert a világ *Ludolph van Ceulen* hollandra lefordított változatú néven ismeri; a $\pi$ számot az ő tiszteletére nevezik Ludolf-féle (vagy Ludolph-féle) számnak, ugyanis 1596-ban 20 tizedesjegyre számította ki $\pi$ értékét [2].

Az [1] kötet részletesen ismerteti Segner számításait, azonban csak kevés információ derül ki egy fontos geometriai észrevételről, mely azonban Segner gondolatmenetének a kulcsa. Ezt az észrevételt *Segner kétharmados törvénye* névvel illetjük, és itt most részletesen elemezzük. Az eredmény *Archimédész* (Kr. e. 287 – Kr. e. 212) híres kétharmados tételére hasonlít; ez az oka az elnevezésünknek.

Bizonyítást is adunk, és természetesen ügyelünk arra, hogy a bizonyításban csak olyan módszereket használjunk, melyek már Segner korában is ismertek voltak. Sajnos nem áll rendelkezésünkre adat, hogy maga Segner eredetileg milyen bizonyítást talált az észrevételére.

**A kétharmados törvény megfogalmazása.** Legyen $0 < x \leq a < 0.49$. Már-most

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{7}\right)^2\\
=\quad&\frac{x^4(7-28x^2-4x^4)}{196}\\
>\quad&\frac{x^4(7-28\left(\frac{49}{100}\right)^2-4\left(\frac{49}{100}\right)^4)}{196}=\frac{166\,457\ x^4}{700\,000\,000}>0
\end{aligned}
$$

miatt

$$\sqrt{1-x^2}>1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{7}$$

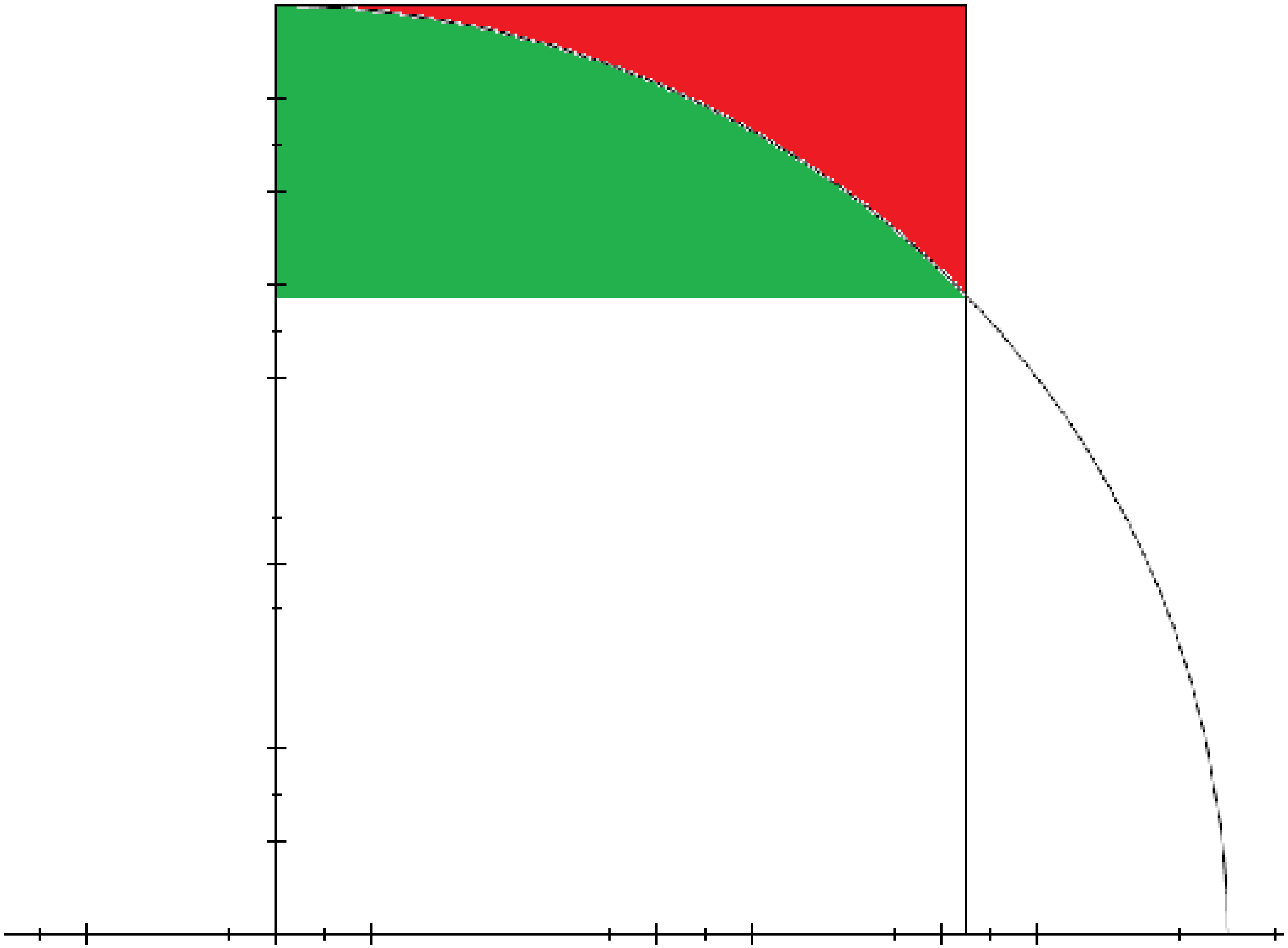
Következmény:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\int_0^a \sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}\;dx \\
>\;&\frac{1}{a\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\int_0^a \;1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{7}\;-\sqrt{1-a^2}dx \\
=\;&1-\;\frac{a^2(6a^2+35)}{210\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}
\end{aligned}$$

**Állítás** (Segner kétharmados törvénye).

$$\frac{1}{a\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\;\int_0^a \sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}\;dx>\frac{2}{3}$$

Segner kétharmados törvényének geometriai jelentése: *egy negyedkörnél kisebb*



*fél körszelet területe több mint kétharmada a fél körszeletet természes módon befoglaló téglalap területének*. A koordinátarendszerben a fél körszeletet balról az $y$-tengely, fentről az $y = \sqrt{1-x^2}$ egyenletű körív, alulról az $y = \sqrt{1-a^2}$ egyenletű egyenes határolják. A befoglaló téglalap másik két oldalegyenese az $y = 1$ egyenletű és az $x = a$ egyenletű egyenesek. Az ábrán a kétharmados törvény azt jelenti, hogy a zöld terület több mint kétszer nagyobb a piros területnél.

Itt jegyezzük meg, hogy körív helyett parabolaívet értve pontos lesz a kétharmados arány, ahogyan azt már Archimédész [3] is megállapította. Képletben:

$$\frac{1}{a\left(1-(1-a^2)\right)} \int_0^a \left(1-x^2\right) - \left(1-a^2\right)\; dx = \frac{2}{3}$$

**Segner kétharmados törvényének bizonyítása.** A fentiek alapján elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{a^2(6a^2+35)}{210\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)} < \frac{1}{3}$$

Némi számolással ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} & 210\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{a^2(6a^2+35)}{210\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\right) \\ = \; & 70-35a^2-6a^4-70\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

Elegendő tehát azt megmutatni, hogy

$$70-35a^2-6a^4 > 70\sqrt{1-a^2}$$

Ármost

$$\left(70 - 35a^2 - 6a^4\right)^2 - \left(70\sqrt{1 - a^2}\right)^2 = 36a^8 + 420a^6 + 385a^4 > 0$$

A fenti bizonyítás csak az $a < 0.49$ esetben működik, de a többi esetben még a kétharmadnál nagyobb arány is könnyen bizonyítható. Más szóval Segner kétharmados törvényének az ereje csak a kis $a$ értékekre mutatkozik meg.

**Hivatkozások.**

1. *Kovács L.*: Segner János András — Egy jeles hungarus a 18. századból — Orvos, matematikus, fizikus, csillagász, vegyész, tanár, filozófus és műszaki alkotó, kiadó: Magyar Tudománytörténeti és Egészségtudományi Intézet, Budapest, 2018, ISBN 978-615-5365-25-6. (A kötet további szerzői, szerkesztői: *Gazda I., Abonyi I.*, *Gurka D.*, *Rab I.*, *J. J. O'Connor, E. F. Robertson*)
`http://real.mtak.hu/74845`

2. *Wikipedia*: Ludolph van Ceulen.
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen`

3. *Wikipedia*: Arkhimédész.
`https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9sz`