Haladvány Kiadvány 2018.04.23

Segner becslése a Ludolf-féle számra

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

A cím magyarázata. A németországi *J. A. Segner* (1704–1777) polihisztor Pozsony vármegyében született, elemi és középiskoláit hazánkban járta ki, Jénában lett doktor, Debrecen városának volt orvosa, majd Jéna, Göttingen és Halle egyetemén tanárkodott. Nem csak orvosként, hanem vegyészként, fizikusként, csillagászként és matematikusként is kimagaslott német professzortársai közül; büszkén hírdette magyarországi gyökereit.

A közelmúltban jelent meg Kovács László tollából az [1] kötet, mely tárgyalja — többek közt — Segner vizsgálatait a Ludolf-féle számmal kapcsolatban. A Ludolf név *van Ceulen* holland — neve alapján kölni eredetű — vívómester és tudós keresztneve, aki 1596-ban 20 tizedesjegyre számította ki π értékét [2]; a π számot az ő tiszteletére nevezik Ludolf-féle számnak.

Az [1] kötet részletesen ismerteti Segner számításait, azonban a tárgyalásmód sajnos részben téves, részben hiányos. A szükséges kiigazításokat végezzük el ebben a rövid dolgozatban.

Segner alsó becslése. Az egységnyi sugarú kör területe π. Írjunk az egységnyi sugarú kör köré egy szabályos 96-szöget, majd a 96-szög szimmetriatengelyeivel — összesen 192 szimmetriatengellyel — osszuk azt 192 egybevágó derékszögű háromszögre. A derékszögű háromszögek átfogója és hosszabbik befogója a kör középpontjából indul; az általuk bezárt szög: $\frac{360^\circ}{192} = \frac{15^\circ}{8}$; a hosszabbik befogó hossza egységnyi.

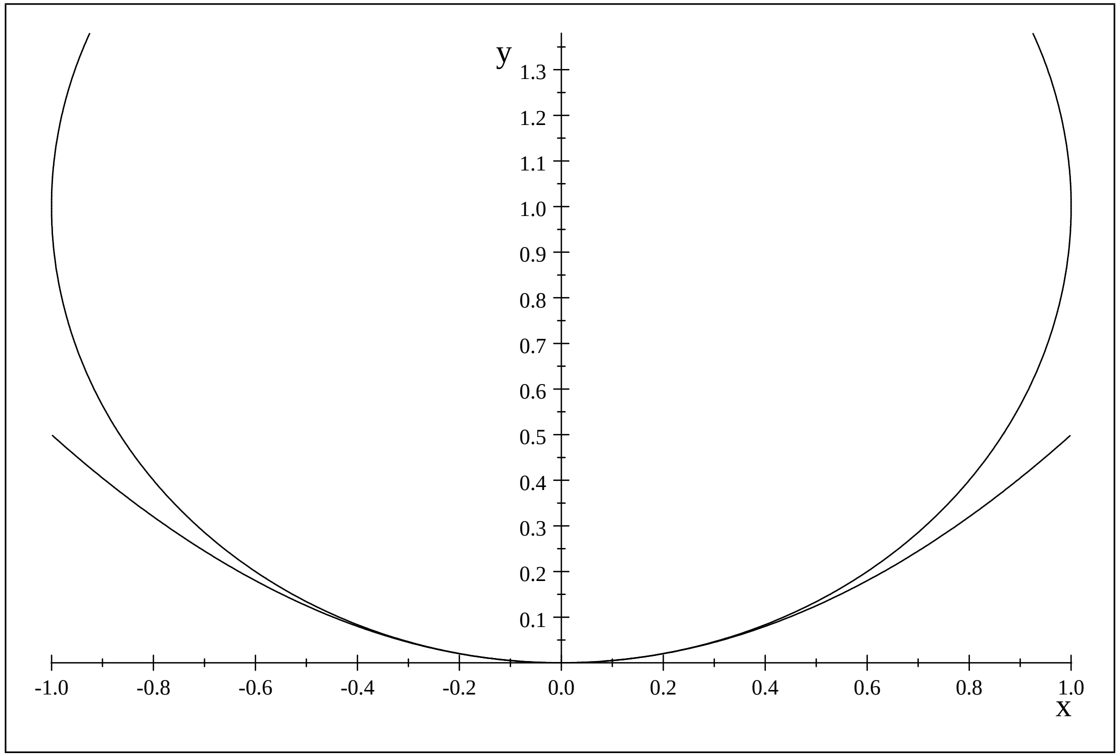
Ragadjunk ki egy konkrét derékszögű háromszöget a tekintettek közül. Segner nagyszerűsége abban nyilvánul meg, hogy meglátta: *a kiragadott derékszögű háromszögben a körön belüli terület (nagyon kevéssel ugyan, de) több, mint*

$$\frac{1}{2}\tan\frac{15^\circ}{8} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{15^\circ}{8}\right)\right)$$

A becslés igazolásához szükség van egy geometriai egyenlőtlenségre, melynek részletezése hiányzik az [1] kötetből, és nem állnak rendelkezésünkre Segner eredeti számításai sem. A jelen munka szerzőjének egy másik dolgozatában megtaláljuk a konkrét geometriai állítás részleteit és egy olyan bizonyítást, mely akár Segner korában is rendelkezésre állhatott volna [4]. Elképzelhető — bár kicsi reménnyel gondoljuk —, hogy Segnernek volt egyszerű, elemi bizonyítása. Valószínűbbnek véljük azonban, hogy Segner az ő korában még általánosan elfogadott heurisztikus jellegű okfejtéssel érvelt, és így győződött meg igazáról. De a szigorú 21. századi vizsgálataink szerint is igaza volt, tehát a fenti képlet valóban korrekt alsó becslés a kiragadott háromszögnek a kör belsejébe eső területére. (A Segner-féle matematikai módszerek iránt érdeklődő olvasót az [1] kötet forrásmunkáihoz irányítjuk.)

Segner szóbahozott segédtételének bizonyítását tehát megtaláljuk [4]-ben. Segner után több mint egy évszázaddal Kürschák József fiatal matematikusnak — a későbbi híres műegyetemi professzornak — is feltűnt a Segner-féle segédtétel bizonyításának a hiánya. Ő maga adott egy ellenőrizhető bizonyítást, mely elemi geometriai észrevételeken és a végtelen mértani sor összegképletén alapul. (A részletek megtalálhatók [5]-ben.)

Talán érdemes megjegyezni, hogy Segner segédtétele a parabolaszelet területére vonatkozó ismert eredményeket idézi emlékezetünkbe. *Archimédész* (Kr. e. 287 – Kr. e. 212) óta tudjuk, hogy mekkora a parabolaszelet területe. Ha körív helyett parabolaívvel számolnánk, akkor a fenti képletben a meglehetősen éles becslést kiadó $\frac{2}{3}$ együttható teljesen pontos érték lenne a körszelet helyett a parabolaszelet területére. A hasonlóság abban rejlik, hogy $x^2 = 2y - y^2$ egyenletű kör illetve $x^2 = 2y$ egyenletű parabola esetén egy rövid, az origóból induló körív és egy rövid, az origóból induló parabolaív nehezen különböztethető meg egymástól. Árnyalatnyi különbség azonban mégis van: az origótól távolodva a parabolaív egy nagyon kicsit egyenesedik, míg a körív állandó görbületű marad.



A π-re tehát a következő alsó közelítés jön ki Segner módszerével (mely korrekt, de a bizonyítása [1]-ben hiányos):

$$96\tan\frac{15^\circ}{8}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{15^\circ}{8}\right)\right)$$

Mosolyt fakaszt ajkunkra, hogy [1] közli tizedestörtben a fenti számot: 3.14159282. Nyilvánvaló ugyanis, hogy itt kalkulátor vagy számítógép használatára került sor, amely Segner vonatkozásában nem ildomos. (Bármilyen ravasz is, a verembe e-sett róka nem húzhatja ki magát a saját farkánál fogva; a $\cos$ és $\tan$ függvények pontos értékei kiszámításához okvetlenül szükséges magának a π-nek sok-sok tizedesjegye.) Gyökjelekkel és alapműveletekkel kellett volna kiszámolni, hogy mennyi a fenti képlet számértéke felülről becsülve. Ki lehetne indulni abból, hogy $2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$, és hogy $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$, és így megkapható, hogy $4\cos 15^\circ = \sqrt{2}+\sqrt{6}$. Folytatólagosan $4\cos\frac{15^\circ}{2} =$

$\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{24}}$, továbbá

$$\begin{aligned}
4\cos\frac{15^\circ}{4} &= \sqrt{8+\sqrt{8}\cdot\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}\\
4\cos\frac{15^\circ}{8} &= \sqrt{8+\sqrt{8}\cdot\sqrt{4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}}\\
4\sin\frac{15^\circ}{8} &= \sqrt{8-\sqrt{8}\cdot\sqrt{4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}}
\end{aligned}$$

Mindazonáltal most már olyan formában írható fel a fenti közelítés a Ludolf-féle számra, mely Segner korában is értelmezhető és közelítőleg kikalkulálható. Becsülettel végiszámolva azt kapjuk, hogy az [1] kötet által közölt közelítő érték utolsó számjegye már hibás; Segner képletének pontos értéke több, mint 3.14159283, de kevesebb, mint 3.14159284.

Hivatkozások

1. *Kovács L.*: Segner János András — Egy jeles hungarus a 18. századból — Orvos, matematikus, fizikus, csillagász, vegyész, tanár, filozófus és műszaki alkotó. kiadó: Magyar Tudománytörténeti és Egészségtudományi Intézet, Budapest, 2018, ISBN 978-615-5365-25-6. (A kötet további szerzői, szerkesztői: *Gazda I., Abonyi I., Gurka D., Rab I., J. J. O'Connor, E. F. Robertson*)
http://real.mtak.hu/74845

2. *Wikipedia*: Ludolph van Ceulen.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen

3. *Wikipedia*: Arkhimédész.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9sz

4. *Hujter M.*: Segner kétharmados törvénye. Haladvány Kiadány 2018.04.16
http://math.bme.hu/~hujter/080416.pdf

5. *Kürschák J.*: A körmérés története és elmélete. Mathematikai és Physikai Lapok 1892.
http://real-j.mtak.hu/7270/