Haladvány Kiadvány 2018.04.25

Segner és Kürschák módszerével a körszelet területéről

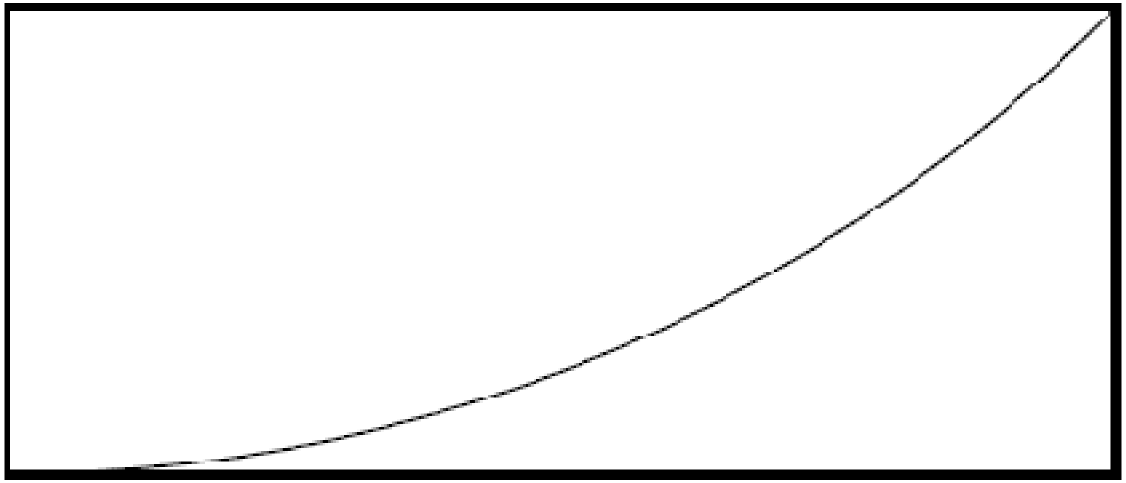
Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Egy téglalap területének felosztásáról. Tekintsük a szokásos derékszögű koordinátarendszerben adott $1 > a > b > 0$ paraméterekre a

$$0 \leq x \leq a \qquad\qquad 0 \leq y \leq b$$

egyenlőtlenségekkel definiált téglalapot. Az a, b paraméterekről tegyük fel, hogy

$$a^2 = b(2 - b)$$



Tekintsük az

$$x^2 = y(2 - y)$$

egyenletű, egységnyi sugarú kört, melynek a téglalapba eső ívhosszát jelölje ϑ. (A körvonal átmegy a téglalap két átellenes sarkán, nevezetesen a bal alsón és a jobb felsőn.) Úgy tudjuk, *Segner András János* (1704–1777) érdeme az a felismerés, hogy a körív a téglalapot úgy vágja ketté, hogy a konvex — azaz a felső — darab területe több, mint kétszer akkora, mint a konkáv — azaz az alsó — darabé. *Kürschák József* (1864–1933) egy bizonyítását ismerjük erre a tényre. (Pontosabban fogalmazva: Kürschák egyik tételéből egyszerűen következik a területarányra vonatkozó fenti állítás.) A jelen dolgozatban felhasználjuk Kürschák bizonyítási ötletét, és élesítjük Segner felismerését az által, hogy bizonyítjuk és felhasználjuk a következő, kissé erősebb tételt:

Tétel. *A fentiekben definiált téglalapdaraboknál a konvex darab és a konkáv darab területének aránya több mint*

$$\left(3+\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{4}}\right):\ \left(3-\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{4}}\right)$$

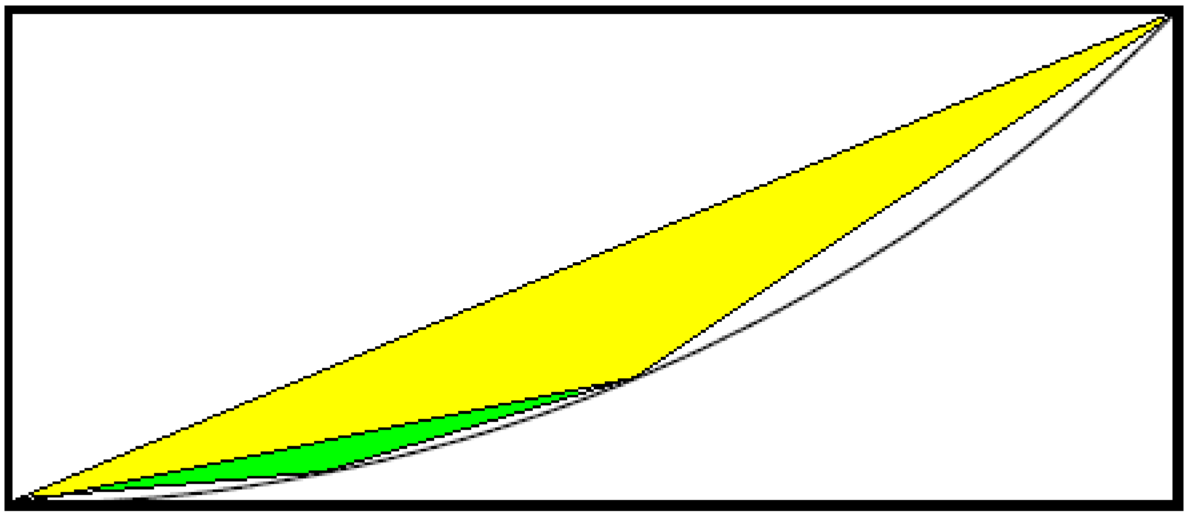
A tételben szereplő tört értéke nyilván 1-nél nagyobb, ezért a felírt arány nagyobb a $(3+1):(3-1)$ aránynál, azaz élesebb a becslés a Segner–Kürschák-féle becslésnél.

Megjegyezzük, hogy ha az $x^2=y(2-y)$ egyenletű körívet az $x^2=2y$ egyenletű parabolára cseréljük, az $a^2=b(2-b)$ feltételt pedig az $a^2=2b$ feltételre, akkor a szóban forgó arány pontosan 2 lesz. Ez a tény már *Arkhimédész* (kb. Kr. e. 287–Kr. e. 212) által is bizonyított volt.

Megjegyezzük továbbá, hogy ha a értéke közel van a nullához, akkor a kétféle téglalap madnem megegyezik, és a kétféle ív is. Az eltérés a téglalap bal alsó sarka közelében nagyon-nagyon kevés, a jobb felső sarok közelében kicsit több, de ott is csak a^4 nagyságrendű. Mindez azért van, mert a téglalapba eső körív x koordinátájú pontja csak nagyon-nagyon kevéssel van magasabban, mint a parabolaív x koordinátájú pontja, hiszen sorfejtéssel

$$\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}+\frac{5x^8}{128}+\cdots$$

A tétel bizonyítása. A bizonyítást Kürschák ötleteinek felhasználásával végezzük. Tekintsük a körív felezőpontját és a bal oldali végponthoz közelebbi negyedelőpontját, és képezzünk egyenlő szárú háromszögeket az új ábra szerint. Nem jelent különösebb nehézséget a nagyobbik háromszög területének a kiszámítása,



hiszen az alapja $2\sin\frac{\vartheta}{2}$ hosszúságú, az alapon fekvő szögei pedig $\frac{\vartheta}{2}$ hosszúságú ívhez tartozó kerületi szögek, tehát $\frac{\vartheta}{4}$ nagyságúak; ezt kapjuk: $\sin^2\frac{\vartheta}{2}\tan\frac{\vartheta}{4}$. Hasonlóképpen a kisebbik egyenlő szárú háromszög területe: $\sin^2\frac{\vartheta}{4}\tan\frac{\vartheta}{8}$. Most nézzük meg, hányszor nagyobb területű a nagyobbik egyenlő szárú háromszög a kisebbik egyenlő szárú háromszögnél! Ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2}\tan\frac{\vartheta}{4}\right) \quad &: \quad \left(\sin^2\frac{\vartheta}{4}\tan\frac{\vartheta}{8}\right)\\
&= \left(4\sin^2\frac{\vartheta}{4}\cos^2\frac{\vartheta}{4}\tan\frac{\vartheta}{4}\right) : \left(4\sin^2\frac{\vartheta}{8}\cos^2\frac{\vartheta}{8}\tan\frac{\vartheta}{8}\right)\\
&= \left(\sin^3\frac{\vartheta}{4}\cos\frac{\vartheta}{4}\right) : \left(\sin^3\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{8}\right)\\
&= \left(8\sin^3\frac{\vartheta}{8}\cos^3\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{4}\right) : \left(\sin^3\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{8}\right)\\
&= \left(8\sin^3\frac{\vartheta}{8}\cos^3\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{4}\right) : \left(\sin^3\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{8}\right)\\
&= 8\cos^2\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{4}
\end{aligned}$$

Ez a szám kevesebb, mint 8, de több mint 7, mert $a > b$ miatt $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, és így

$$8\cos^2\frac{\vartheta}{8}\cos\frac{\vartheta}{4} > 8\cos^2\frac{\pi/2}{8}\cos\frac{\pi/2}{4} \approx 7.1$$

Ismeretes, hogy ha $t_1, t_2, t_3, \ldots$ pozitív számok úgy, hogy minden n-re $t_n > t_{n+1} > \frac{t_n}{4}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n > t_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = \frac{4t_1}{3}$$

Mindazonáltal azt nyerjük, hogy a téglalapunk berajzolt átlója és a körív közötti terület több, mint $\frac{4t_1}{3}$, ahol $t_1 = \sin^2\frac{\vartheta}{2}\tan\frac{\vartheta}{4}$. Következésképpen a tétel állításában szereplő arány nagyobb, mint

$$\frac{\frac{ab}{2} + \frac{4t_1}{3}}{\frac{ab}{2} - \frac{4t_1}{3}}$$

Figyelembe véve, hogy $a = \sin\vartheta$ és $b = 1 - \cos\vartheta$, és felhasználva a $\varphi = \frac{\vartheta}{4}$ jelölést az alábbi számolás teszi teljessé a bizonyítást:

$$ab = \sin 4\varphi(1 - \cos 4\varphi) = 4\sin^3 2\varphi \cos 2\varphi$$

$$t_1 = \sin^2 2\varphi \tan\varphi = 4\sin^3\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{ab}{8t_1} = \frac{4\sin^3 2\varphi\cos 2\varphi}{32\sin^3\varphi\cos\varphi} = \frac{32\sin^3\varphi\cos^3\varphi\cos 2\varphi}{32\sin^3\varphi\cos\varphi} = \cos^2\varphi\cos 2\varphi$$

Mivel a

$$\frac{3 + \frac{1}{z}}{3 - \frac{1}{z}} = \frac{\frac{ab}{2} + \frac{4t_1}{3}}{\frac{ab}{2} - \frac{4t_1}{3}}$$

egyenlet megoldása $z = \frac{ab}{8t_1}$, kész a bizonyítás.

A π közelítő kiszámításáról. Megmutatjuk, hogy Segner módszerét továbbfejlesztve hogyan lehet meglepően éles alsó becslést kapni π-re, azaz hogyan lehet jó közelítéssel a kört négyszögesíteni. Tekinsünk egy olyan hegyesszöget, melynek a koszinuszát meg tudjuk szerkeszteni. Például kiindulhatunk 36°-ból. Ismert, hogy

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Ebből hamar megkaphatjuk, hogy

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \qquad \cos 9^\circ = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+\sqrt{20}}}{8}}$$

Tekintsük a fenti tételünket a $\vartheta = \pi/5$ értékre. Mármost a téglalap területe a fentiek szerint

$$4\sin^3 18^\circ \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{8}$$

Ennek a területnek a felső része a tétel szerint legalább

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\cos 18^\circ \cos^2 9^\circ}$$

arányú része, tehát legalább ekkora területű:

$$\left(3 + \frac{16}{\sqrt{10+\sqrt{20}}\left(4+\sqrt{10+\sqrt{20}}\right)}\right) \cdot \frac{\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{48}$$

A felső téglalaprész területét π segítségével pontosan is fel tudjuk írni:

$$\frac{\vartheta}{2}-\frac{a(1-b)}{2}=\frac{\pi}{10}-\frac{\sin 72^\circ}{4}=\frac{\pi}{10}-\frac{\sqrt{10+\sqrt{20}}}{16}$$

Mindazonáltal π-re a következő alsó becslést nyerjük:

$$\frac{5\cdot\sqrt{10+\sqrt{20}}}{8}+\frac{5\cdot\sqrt{50-\sqrt{2420}}}{24}\cdot\left(3+\frac{16}{5+\sqrt{5}+\sqrt{40+\sqrt{320}}}\right)$$
$$\approx\ 3.1406$$

Nem túl tetszetős képlet ez, és a hibája körülbelül 1 ezrednyi. Ha fele akkora szögből indultunk volna ki, negyedakkora lenne a hibánk. Ha csak az eredetei Segner-módszerrel dolgoznánk ugyanazzal a kiindulási szöggel, akkor a fentiekben a

$$\frac{16}{5+\sqrt{5}+\sqrt{40+\sqrt{320}}} \approx 1.077\,8$$

képletrész helyett csak 1 egységgel számolhatnánk, és így a pontatlanabb

$$\frac{5}{8}\cdot\sqrt{10+\sqrt{20}}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{50-\sqrt{2420}} \approx 3.126$$

érték jönne ki.

Hivatkozások

1. *Kovács L.*: Segner János András — Egy jeles hungarus a 18. századból — Orvos, matematikus, fizikus, csillagász, vegyész, tanár, filozófus és műszaki alkotó.

kiadó: *Magyar Tudománytörténeti és Egészségtudományi Intézet, Budapest*, 2018., ISBN 978-615-5365-25-6. (A kötet további szerzői, szerkesztői: *Gazda I., Abonyi I.*, *Gurka D.*, *Rab I.*, *J. J. O'Connor, E. F. Robertson*)
http://real.mtak.hu/74845

2. *Wikipédia*: Arkhimédész. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9sz

3. *Wikipédia*: Ludolph van Ceulen. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen

4. *Wikipédia*: Segner János András. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Segner_J%C3%A1nos_Andr%C3%A1s

5. *Wikipédia*: Kürschák József. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%BCrsch%C3%A1k_J%C3%B3zsef

6. *Kürschák J.*: A körmérés története és elmélete. *Mathematikai és Physikai Lapok* **1**, 1892.
http://real-j.mtak.hu/7270/

7. *Hujter M.*: Segner kétharmados törvénye. *Haladvány Kiadány* **18-04-16**, 2018.
http://math.bme.hu/~hujter/180416.pdf

8. *Hujter M.*: Segner becslése a Ludolf-féle számra. *Haladvány Kiadán*y **18-04-23**, 2018.
http://math.bme.hu/~hujter/180423.pdf