Haladvány Kiadvány 2018.05.05

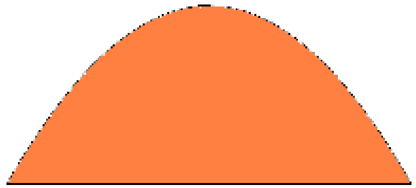
Segner-számok és a keskeny körszeletek területe

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. Segner módszerével a keskeny körszelet területére meglehetősen éles, természetes módon számítható alsó becslés adható. Segner nevét világhírűvé a Segner-számok (Catalan-számok) tették, melyek felhasználásával ebben a dolgozatban tetszőleges pontosságú felső becslést adunk. Bizonyítjuk majd — többek közt — a következő képletet:

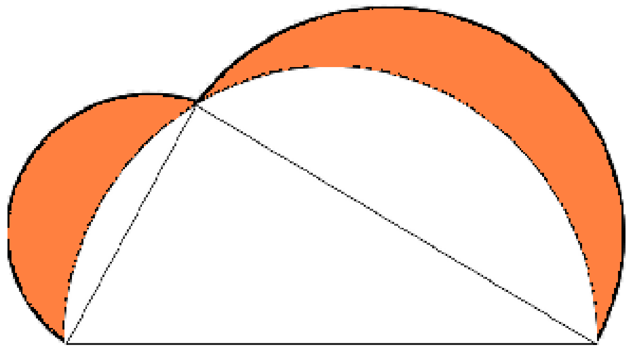
$$\frac{\pi}{40} = \frac{\Phi - 1}{4} - \frac{\sqrt{3-\Phi}}{16} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot (\sqrt{5}F_{2n+3} - F_{2n+3} - 2F_{2n+2})}{(2n+3)\cdot 4^{2n+3}}$$

ahol C_0, C_1, C_2, ... a Segner-számok, F_0, F_1, F_2, ... a Fibonacci-számok, $\Phi = 1 + 2\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618034$ pedig az (aranymetszési) aranyarány.



Történeti felvezetés. Ha egy parabolával határolt (konvex) síkidomot egy, a tengelyére merőleges egyenessel egy korlátos és egy nemkorlátos síkidomra vágunk, akkor a korlátos darabot parabolaszeletnek nevezzük. A parabolaszelet alapjának az egyenes szakasz határoló vonalat tekintjük, magasságának pedig a parabola tengelyének a parabolaszeletbe eső részét. *Arkhimédész* óta tudjuk, hogy a parabolaszelet területe az alapszor magasság szorzat kétharmada. Ilyen módon *a parabolaszelet* könnyen *négyszögesíthető*, azaz körzővel és vonalzóval is szerkeszthető az alap és a magasság felhasználásával a parabolaszelettel megegyező területű négyzet.

Arkhimédész előtt két évszázaddal élt *Khioszi Hippokratész*, aki nem tévesztendő



össze sem a *Kószi Hippokratész* néven ismert híres orvossal, sem a délnyugat-szicíliai $\Gamma\varepsilon\lambda\alpha$ ókori város (és fél Szicília) valamikori uralkodójával, *Gélai Hippokratész* türannosszal. Szóval Khioszi Hippokratész óta tudjuk négyszögesíteni az olyan holdacskákat, melyeket egy derékszögű háromszög oldalai köré (mint átmérők köré) írt körvonalak határolnak. Az ábrán látható két holdacska összterülete megegyezik a derékszögű háromszög területével. Bosszantóan érdekes, hogy általános esetben a két holdacskát külön-külön nem tudjuk négyszögesíteni.

Egy praktikus ötlet. *Segner* új ötlettel állt elő, bár módszere nem teljes pontossággal, hanem csak nagyon jó közelítésben ad négyszögesítési lehetőséget. Azt vette észre, hogy ha a derékszögű háromszög rövidebbik befogója sokkal kisebb, mint a másik befogó, akkor a kisebbik holdacska és a kisebbik befogó közötti keskeny körszelet majdnem teljes pontossággal parabolaszeletnek tekinthető. Például az ábra bal alsó sarkánál látható fehér keskeny körszelet alapját ki tudjuk fejezni a derékszögű háromszög legkisebb, α szögével, ha az átfogót 2 egységnyinek tekintjük: $2\sin\alpha$. A keskeny körszelet magassága: $1-\cos\alpha$. A keskeny körszelet területének a Segner-féle becslése tehát:

$$\frac{2}{3}\cdot 2\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)=\frac{8}{3}\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Ilyen területű négyzet könnyen szerkeszthető a derékszögű háromszögből kiindulva. Vegyük figyelembe véve, hogy a tekintett keskeny körszelet pontos területe éppen $\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$, továbbá vegyük figyelembe, hogy mai tudásunk szerint

$$\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\frac{8}{3}\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$= \frac{\alpha^5}{30} - \frac{\alpha^7}{252} + \frac{\alpha^9}{4320} - \frac{17\alpha^{11}}{1995840} + \frac{31\alpha^{13}}{141523200} - \frac{\alpha^{15}}{239500800} \pm \cdots$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy Segner közelítése meglehetősen pontos, hiszen ha α értéke kicsi, akkor az eltérés csak $\alpha^5/30$ nagyságrendű.

Azt, hogy Segner módszerével olyan közelítést kapunk a területre, amely valójában egy alsó becslés, *Kürschák* bizonyította több, mint egy évszázaddal Segner után.

Catalan-(helyesebben Segner-)számok. Bármennyire is pontos Segner módszere, itt mi most még pontosabbá tesszük azt. Érdekesség lesz, hogy a továbbfejlesztett módszerhez fel fogjuk használni a *Segner-számok* néven ismert sorozatot: $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, \ldots$, ahol a sorozat definiáló rekurziója:

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$$

A rekurziót Segner találta azzal a céllal, hogy megmutatható legyen, hogy egy konvex n-szög C_n féle módon bontható háromszögekre $n-3$ darab (egymást nem metsző) átló behúzásával. Bár *Catalan* Segner-számoknak nevezte a szóbanforgó számokat, a világ mágis *Catalan-számok* néven ismeri azokat. Temérdek ismeretanyag halmozódott fel velük kapcsolatban, például az, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$\frac{n^3 \cdot C_n^2}{16^n} \longrightarrow \frac{1}{\pi}$$

Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

hatványsorral definiált $c(x)$ függvényt mondjuk $\frac{-1}{5} < x < \frac{1}{5}$ esetén. (Azért ebben az intervallumban, hogy semmi kétség ne merülhessen fel a hatványsor egyenletes konvergenciájával kapcsolatban, hiszen $C_n \leq 4^n$ nyilvánvaló.) Segner rekurziója alapján könnyen látható, hogy

$$1 + x \cdot c^2(x) = c(x)$$

Ebből megkapjuk, hogy

$$x \cdot c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

amiből pedig azt, hogy

$$\int \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot x^{2n+3}}{2n + 3}$$

Határozott integrálás és numerikus sorok. A fenti képlet következménye, hogy

$$\int_0^{v/4} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot \nu^{2n+3}}{(2n + 3) \cdot 4^{2n+3}}$$

ahol például

$$\nu = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi - 1 \approx 0.618034$$

a híres aranymetszési arány. Mármost $t = 2x$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\int_0^{\nu/4} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}\,dx &= \int_0^{\nu/2} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{4}\,dt \\
&= \frac{\nu}{8} - \frac{1}{4}\int_0^{\nu/2} \sqrt{1-t^2}\,dt
\end{aligned}$$

Itt $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\nu}{2}$ miatt

$$8\int_0^{\nu/2} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{2\pi}{5} + \nu\sqrt{4-\nu^2}$$

Mármost az adott ν értékre

$$\nu\sqrt{4-\nu^2}=\sqrt{4\nu^2-v^4}=\sqrt{2-\nu}$$

Mindazonáltal

$$\int_0^{\nu/4}\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}\,dx=\frac{\nu}{8}-\frac{\sqrt{2-\nu}}{32}-\frac{\pi}{80}$$

Ugyanakkor

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n\cdot\nu^{2n+3}}{(2n+3)\cdot 4^{2n+3}}=\frac{\sqrt{5}-2}{192}+\frac{5\sqrt{5}-11}{10240}+\frac{13\sqrt{5}-29}{114688}+\frac{85\sqrt{5}-190}{2359296}$$

$$+\frac{623\sqrt{5}-1393}{46137344}+\frac{4893\sqrt{5}-10941}{872415232}\cdots$$

Megjegyezzük, hogy a fent kiírt 6 tagra a részletösszeg már 12 tizedesjegyre pontos. Említést érdemel továbbá az is, hogy teljes indukcióval könnyen igazolható:

$2\nu^{2n+3} = \sqrt{5}F_{2n+3} - F_{2n+3} - 2F_{2n+2}$, ahol $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ az ismert Fibonacci-számok. Következésképpen a fenti végtelen összeg minden tagja pozitív racionális számszor $\sqrt{5}$ minusz pozitív racionális szám alakú, és ezáltal nagy numerikus pontossággal könnyen számolható.

A sorfejtéses területszámítás alkalmazása egy konkrét körszeletre. Térjünk vissza Segner eredeti becsléséhez, mely mondjuk $\alpha = \frac{\pi}{10} = 18^\circ$ esetére, a keskeny, egységnyi sugarú körszelet területére vonatkozik. Ekkor a pontos érték:

$$\frac{\pi}{10} - \frac{\sin 36^\circ}{2} = \frac{\pi}{10} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{32}} \approx 0.0202666$$

Ugyanakkor a Segner-féle (alsó) becslés:

$$\frac{4}{3} \cdot (\sin 18^\circ) \cdot (1 - \cos 18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{12}\left(4 - \sqrt{10+\sqrt{20}}\right) \approx 0.0201658$$

A jelen dolgozat hozzájárulása szerint a pontos képletbe $\frac{\pi}{10}$ helyére

$$\nu - \frac{\sqrt{2-\nu}}{4} - 8\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot \nu^{2n+3}}{(2n+3)\cdot 4^{2n+3}}$$

írható. Például csak az első három tagot kiírva a végtelen összegből, aztán az egyszerűsítéseket elvégezve ezt a (felső) becslést kapjuk:

$$\frac{97525\sqrt{5} - 87317}{215\,040} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.0202669$$

Meglepően pontos érték, hiszen csak körülbelül $2.36 \cdot 10^{-7}$ nagyságban (pontosabban szólva „kicsiségben") lő túl a pontos értéken, miközben a Segner-féle alsó becslés hibája körülbelül $1.008 \cdot 10^{-4}$ az ellenkező oldalról. Ha pedig három helyett négy tagot is figyelembe veszünk a végtelen összegből, akkor a felső becslésünk hibája lecsökken az $1.3 \cdot 10^{-8}$ körülbelüli értékre.

Végkövetkeztetések. Megállapíthatjuk tehát, hogy a Segner-számok nagy hatékonyságú közelítő körnégyszögesítésre is jól használhatók. A fentiekben bemutatott módszerrel a tekintett végtelen összegnek csupán a $0, 1, 2, 3$ indexű tagjait kiírva a hibatag ez (valamely kicsi, pozitív w-re):

$$\frac{w}{8} - \frac{1}{8}\arcsin\frac{w}{2} - \frac{1}{32}w\sqrt{4-w^2} - \sum_{n=0}^{3}\frac{C_n \cdot w^{2n+3}}{(2n+3)\cdot 4^{2n+3}}$$

Mármost

$$\sum_{n=0}^{3}\frac{C_n \cdot w^{2n+3}}{(2n+3)\cdot 4^{2n+3}} = \frac{w^3}{3\cdot 4^3} + \frac{w^5}{5\cdot 4^5} + \frac{2w^7}{7\cdot 4^7} + \frac{5w^9}{9\cdot 4^9}$$

Mindazonáltal sorfejtéssel ez kapható:

$$\begin{aligned} &\frac{w}{8} - \frac{1}{8}\arcsin\frac{w}{2} - \frac{1}{32}w\sqrt{4-w^2} - \frac{w^3}{3\cdot 4^3} - \frac{w^5}{5\cdot 4^5} - \frac{2w^7}{7\cdot 4^7} - \frac{5w^9}{9\cdot 4^9} \\ = \;&\frac{7w^{11}}{23\,068\,672} + \frac{21w^{13}}{436\,207\,616} + \frac{11w^{15}}{1342\,177\,280} + \frac{429w^{17}}{292\,057\,776\,128} + \cdots \end{aligned}$$

A terület közelítése tekintetében w a $2\sin\alpha$ szerepét veszi magára. Megállapíthatjuk tehát, hogy mindössze az $1, 1, 2, 5$ Segner-számok felhasználásával kicsi α esetén $\alpha^{11}/1610$ nagyságúnál kisebb hiba lép fel, hiszen

$$\frac{7\cdot 2^{11}}{23\,068\,672} < \frac{1}{1610}$$

(Nem meglepetés, hogy $C_4 = 14$ miatt $\frac{7}{23\,068\,672} = \frac{14}{11\cdot 4^{11}}$.) Minden újabb Segner-számnak a területet közelítő képletbe való beépítésével további α^2 szorzóval csökkenthető a hiba nagyságrendje.

Hivatkozások

1. *J. A. von Segner*, Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula, *Novi Comm. Acad. Scient. Imper. Petropolitanae* **7** (1758/1759), 203–209.
(a részbeni tartalom ismertetése magyarul:)
http://real.mtak.hu/74845

2. *Kovács L.*: Segner János András — Egy jeles hungarus a 18. századból — Orvos, matematikus, fizikus, csillagász, vegyész, tanár, filozófus és műszaki alkotó. kiadó: *Magyar Tudománytörténeti és Egészségtudományi Intézet, Budapest*, 2018., ISBN 978-615-5365-25-6. (A kötet további szerzői, szerkesztői: *Gazda I., Abonyi I., Gurka D., Rab I., J. J. O'Connor, E. F. Robertson*)
http://real.mtak.hu/74845

3. *Kürschák J.*: A körmérés története és elmélete. *Mathematikai és Physikai Lapok* **1**, 1892.
http://real-j.mtak.hu/7270/

4. *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*: Catalan or Segner numbers. 2018.
https://oeis.org/A000108

5. *Richard P. Stanley*, Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015.
http://books.google.hu/books/about/Catalan_Numbers.html

6. *Wikipédia*: Arkhimédész. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9d%C3%A9sz

7. *Wikipédia*: Khioszi Hippokratész. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Khioszi_Hippokrat%C3%A9sz

8. *Wikipédia*: Ludolph van Ceulen. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Ludolph_van_Ceulen

9. *Wikipédia*: Segner János András. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Segner_J%C3%A1nos_Andr%C3%A1s

10. *Wikipédia*: Kürschák József. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%BCrsch%C3%A1k_J%C3%B3zsef

11. *Wikipédia*: Eugène Charles Catalan. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Charles_Catalan

12. *Wikipédia*: Aranymetszés. 2018.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Aranymetsz%C3%A9s

13. *Hujter M.*: Segner kétharmados törvénye. *Haladvány Kiadány* **18-04-16**, 2018.
http://math.bme.hu/~hujter/180416.pdf

14. *Hujter M.*: Segner becslése a Ludolf-féle számra. *Haladvány Kiadány* **18-04-23**, 2018.
http://math.bme.hu/~hujter/180423.pdf

15. *Hujter M.*: Segner és Kürschák módszerével a körszelet területéről. *Haladvány Kiadány* **18-04-25**, 2018.
http://math.bme.hu/~hujter/180425.pdf