

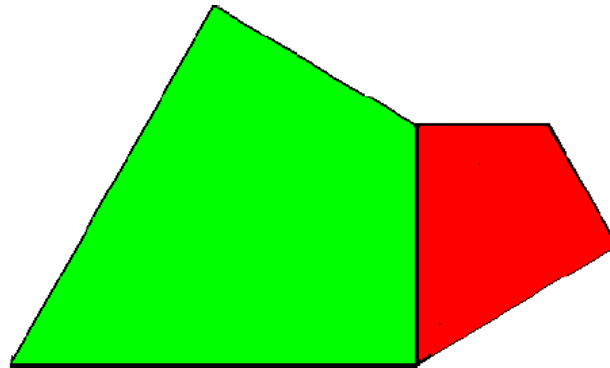
Haladvány Kiadvány 2018-06-16

## A csillaghatszög spidronszerű felgyűrődése mögötti matematika

Hujter Mihály    [hujter.misi@gmail.com](mailto:hujter.misi@gmail.com)

**Tartalmi összefoglaló.** Precíz matematikai bevezetést adunk a csillaghatszög spidronszerű felosztása és hajtogatása révén keletkezett, két- illetve háromdimenziós grafikai illetve geometriai szerkezethez. Bizonyítást adunk egy *Szilassi* illetve *Erdély–Kiss* által vizsgált (utóbbiak által elnevezett) *Spidron Formula* összefüggéshez. Új eredményeink alapja egy önmagában is érdekes segédétel, melynek révén a háromdimenziós kérdések kétdimenziósakká egyszerűsíthetők.

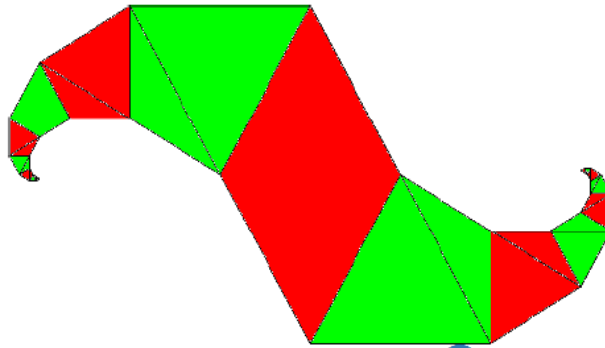
**A csillaghatszög két dimenzióban.** Először a komplex számsíkon dolgozunk. Később kilépünk majd a háromdimenziós euklideszi térbe. Legyen  $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ , azaz komplex számként az egyik primitív tizenkettedik komplex egységgyök, és tekintsük azt a deltoidot, melynek csúcsai:  $0$ ,  $4 \cos \frac{\pi}{6}$ ,  $4\varepsilon$  és  $4\varepsilon^2 \cos \frac{\pi}{6}$ , azaz  $0, \sqrt{12}, \sqrt{12} + 2i, \sqrt{3} + 3i$ .



1. ábra: A legnagyobb és a második legnagyobb deltoid

Ez a deltoid az 1. ábrán a zöld síkidom. A deltoid szögei 60, 90 és 120 fokosak, a hosszabbik oldalak hossza  $\sqrt{12}$ , a rövidebbik oldalak hossza 2, a hosszabbik átló hossza 4, a rövidebbi átló hossza  $\sqrt{12}$ , a területe  $\sqrt{48}$ . Alkalmazzuk Minkowski-értelemben a deltoidra a  $\varphi : z \mapsto \frac{\varepsilon z}{\sqrt{3}} + \sqrt{12}$  transzformációt, és megkapjuk az 1. ábra piros deltoidját. A piros deltoid területe éppen harmada zöld deltoidénak, hiszen az oldalak az eredeti  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -szorosára változnak.

Szemléletesen szólva az eredeti zöld deltoidot az  $(1/\sqrt{3})$ -szorosára kicsinyítettük,



2. ábra: Erdély Dániel SPIDRON<sup>®</sup> konstrukciója

elforgattuk balra  $30^\circ$ -kal, és eltoltuk úgy, a kisebbik deltoidnak az egyik hosszabbik oldala éppen a nagyobbik deltoid egyik rövidebbik oldalához illeszkedjen.

A zöld és a piros deltoid únióját a harmadára kicsinyítve és a kicsinyítéseket ismételve, végül a nyert teljes deltoidsorozatot a  $3i$  komplex számra tükrözve nyerjük a 2. ábrán látható szerkezetet, mely a szerzőjétől, *Erdély Dániel* grafikusművésztől 1979-ben a *spidron* nevet kapta. Az elnevezés utal egyszerre a *spirál*

és a *spider* szavakra, továbbá kihallik belőle még a *sodrony* szavunk foszlánya is.  
[1] (A *spidron* szó és alakzat művészeti és kereskedelmi szempontból védett.)

Egy spidron tükörképe is nyilván spidron. A 2. ábrán látható spidron *Z-helyzetű*, a tükörképe *S-helyzetű*. (Az elnevezések arra utalnak, hogy a Z vagy S betű formájára kunkorodnak a spidron farkai.)

A spidron tehát végtelen sok deltoidból áll, bár eredeti definíciója kétféle háromszög alkotórészeivel történt. A 2. ábrán látható jobb oldali farok végpontja komplex számokból álló mértani sor összegeként kapható meg:

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} h \left( \frac{\varepsilon^2}{3} \right)^n$$

ahol  $h$  az 1. ábrán a piros deltoid jobb oldali sarkát jelöli; a mértani sor kezdő tagja illetve hányadosa

$$w = \varphi(\sqrt{12}) = \frac{\frac{\sqrt{3+i}}{2} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \sqrt{12} = \sqrt{27} + i$$

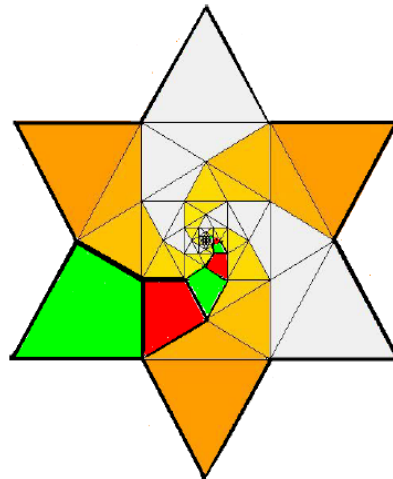
illetve

$$\frac{\varepsilon^2}{3} = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{6}$$

Mindazonáltal

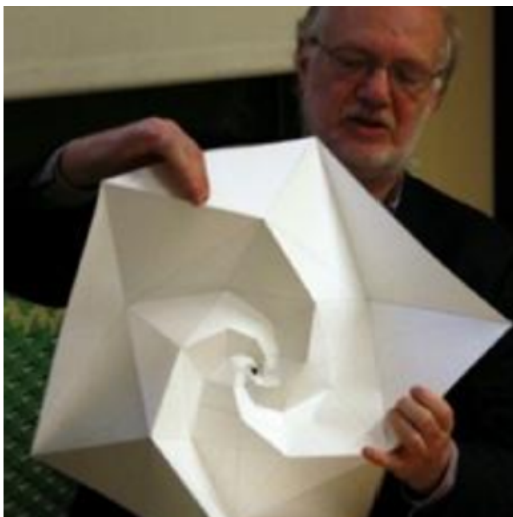
$$T = \frac{h}{1 - \frac{\varepsilon^2}{3}} = \frac{\sqrt{27} + i}{1 - \frac{1 + \sqrt{3}i}{6}} = \sqrt{27} + 3i$$

Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a kiindulási deltoid rövidebbik átlójára tükrözve az  $S$  pontot éppen az origóba jutunk.



3. ábra: Hat spidron-farokból álló csillaghatszög

**Spironszerűen felosztott csillaghatszög.** Tekintsük a 2. ábrán látható spidron jobb oldali karját, azaz a fenti végtelen összegnél tekintetbe vett zöld és piros deltoidok únióját. Könnyen látható, hogy ebből a spidronkarból és ennek 5 egybevágó másolatából egy olyan csillaghatszög rakható össze, melynek középpontja a fenti  $T$  komplex szám, egyik csúcsa pedig az origó. A hat spidronkar egymásból  $T$  körüli,  $60$  fok egész számszorosa szöggel való elforgatással származtatható,



4. ábra: Erdély D. a spidron-mintázat szerint felgyúrt hatszöggel

ahogyan azt a 3. ábra szemlélteti. (Meg kell említenünk, hogy a hivatkozások között felsorolt *Stoicoviciu–Samoilă–Lorenzi*-féle munkában a spidron fogalmától függetlenül is megtalálható a csillaghatszögnek a 3. ábrán látható felosztása.)

**Csillaghatszög három dimenzióban.** Érdekes megfigyelés, hogy a hat spidronkarból álló csillaghatszög szakadás nélkül háromdimenzióssá gyűrhető illetve hajto-



gatható. Ehhez mindegyik deltoidot a rövidebbik átlója mentén egy kicsi szöggel be kell hajtani. A deltoidok határán is megengedjük a hajtogatást. Az, hogy egymáshoz képest mekkora szöggel hajtjuk be a deltoidokat a rövidebbik átlójuk mentén, csak a deltoidok méretétől függ.

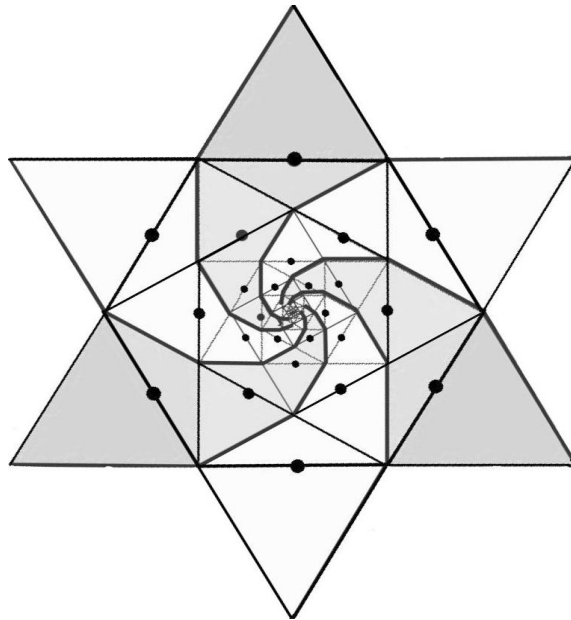
Képzeljük el az eredeti csillaghatszöget egy vízszintes síkban, és a háromdimenzióssá gyűrés után is tekintsük felülnézetből. A csillaghatszög középpontja fixen marad, és a deltoidok kissé eltorzulnak a felülnézetben, de az összegyűrt alakzat továbbra is szimmetrikus marad a 60 fokos elforgatásra nézve az  $T$  pontnál állított függőleges egyeneses, mint tengely körüli forgatáskor. A felgyűrődés után is a deltoidok átlói metszéspontja végig az eredeti vízszintes síkban marad.

A fényképen (a 4. ábrán) a spidron felfedezője, Erdély Dániel látható 2012-ben azzal a felgyűrt hatszöggel, mely a fentemlített csillaghatszög konvex burkából

készült. (Az itt látható spidronkarok a mi nézőpontunkból S-helyzetűeknek látszanak.) A nagyon kicsi középponti deltoidok helyett gyártástechnológiai egyszerűsítéssel csak egy kicsi lyuk lett legyártva.

Jelölje  $\zeta$  illetve  $\eta$  azt a szöveget, amennyivel legnagyobb illetve a második legnagyobb deltoid rövidebbik átlója elfordul a vízszinteshez képest, miután az összes deltoid szimultán gyűrődik. Annak, hogy  $\zeta$  illetve  $\eta$  pozitív-e vagy negatív-e, nem lesz jelentősége. A továbbiakban kiderítjük majd, milyen összefüggés van  $\zeta$  és  $\eta$  koszinusza között. Fel fogjuk használni az 5. és 6. ábrát is.

Az 1. ábrán a zöld deltoid rövidebbik átlójának hossza:  $\sqrt{12}$ . A 6. ábrán tehát  $AD = DC = \sqrt{3}$ . Az is könnyen látható, hogy  $AB = BC = 2$ ,  $BE = 1$ ,  $AE = ET = \sqrt{3}$ . Ezek a távolságok a felgyűrődés előtti helyzetre vonathoznak. A felgyűrődés során a  $T$  pont fixen marad, a  $D$  és  $E$  pontok kissé közelednek



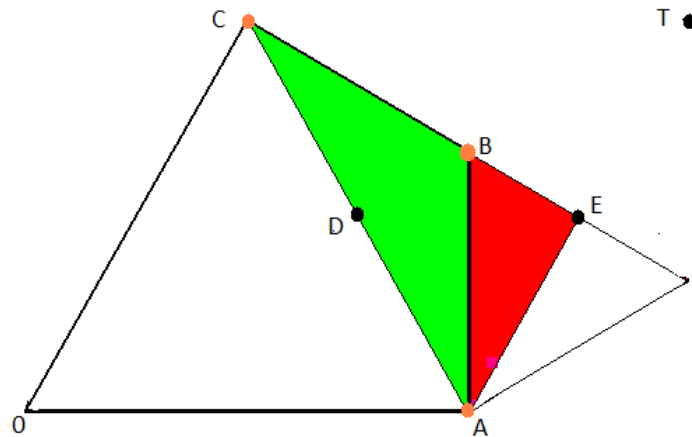
5. ábra: A felgyűrődés előtti csillaghatszög az eredeti síkban maradó pontokkal

ugyan a  $T$  ponthoz, de eközben az eredeti vízszintes síkban maradnak, és a köztük lévő távolság is kissé csökken. Az  $A, B, C$  pontok eltávolodnak az eredeti síktól. Ezen pontok térbeli új helyzetét jelölje  $A', B', C'$ . Ezen három új pontot merőlegesen az eredeti síkra vetítve nyerjük az  $A'', B'', C''$  pontokat. Tehát az  $A'', B'', C'', D, E$  és  $T$  pontok mind az eredeti vízszintes síkon vannak. Az  $A'B'$  és  $B'C'$  távolságok pedig megmaradnak 2 egységnyinek. Szimmetriaokokból az  $A''TC''$  háromszög ugyanúgy egyenlő oldalú, mint az eredeti  $ATC$  háromszög, csak valamivel kisebb.

Némi számolással könnyen megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A''C'' &= C''T = A''T = 2\sqrt{3} \cos \zeta \\ B''E &= \cos \eta \end{aligned}$$

Mivel  $A'A'' = \sqrt{3} \sin \zeta$  és  $B'B'' = \sin \eta$ , ezért az  $A'A''B''B'$  négyszöget tekintve megkapjuk, hogy



6. ábra: Néhány pont a felgyűrődő csillaghatszög részleteként

$$(\sqrt{3} \sin \zeta - \sin \eta)^2 + (A''B'')^2 = (A'B')^2 = 4$$

azaz hogy

$$A''B'' = \sqrt{4 - (\sqrt{3} \sin \zeta - \sin \eta)^2}$$

Most a  $B'B''C''C'$  négyszöget tekintve megkapjuk, hogy

$$(\sqrt{3} \sin \zeta + \sin \eta)^2 + (B''C'')^2 = (B'C')^2 = 4$$

azaz hogy

$$B''C'' = \sqrt{4 - (\sqrt{3} \sin \zeta + \sin \eta)^2}$$

Most  $\zeta$  és  $\eta$  függvényében ki fogjuk számítani az  $B''T$  távolságot is. Mivel a  $DT$  távolság az  $A''TC''$  szabályos háromszögben — melynek oldala  $2\sqrt{3} \cos \zeta$  — egy magasságvonal, ezért  $DT = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cos \zeta = 3 \cos \zeta$ . Hasonlóság alapján tehát  $ET = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cos \eta = \sqrt{3} \cos \eta$ . Mivel a  $B''ET$  derékszög, a  $B''TE$  pedig 30 fokos, ezért

$$B''T = 2 \cos \eta$$

Most egy segédtételt fogunk felhasználni.

**Segédteétel.** Adott a síkban egy  $\sqrt{t}$  oldalú szabályos háromszög és egy pont úgy, hogy a háromszög csúcsaitól mért távolságok:  $\sqrt{p}$ ,  $\sqrt{q}$ ,  $\sqrt{r}$ . Ekkor

$$p^2 + q^2 + r^2 + t^2 = pq + qr + rp + pt + qt + rt$$

A segédteétel bizonyítása. Legyen  $s = \sqrt{t/2}$ . Feltehetjük, hogy az egyenlő oldalú háromszög csúcsai az  $xyz$ -koordináta-rendszerben ezek:  $(s, 0, 0)$ ,  $(0, s, 0)$ ,  $(0, 0, s)$ . Ekkor a háromszög síkjának egyenlete:  $x + y + z = s$ . Az  $(x, y, z)$  pont távolságnégyzete a csúcsoktól:

$$(x - s)^2 + x^2 + z^2, \quad x^2 + (y - s)^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + (z - s)^2$$

Ha tehát a szóbanforgó negyedik pontot tekintjük, melynek koordinátái  $(u, v, w)$ ,

akkor következő egyenletrendszer elégül ki:

$$s = u + v + w$$

$$t = 2s^2$$

$$p = (u - s)^2 + v^2 + w^2$$

$$q = u^2 + (v - s)^2 + w^2$$

$$r = u^2 + v^2 + (w - s)^2$$

Némi hosszás, de egyszerű számolás után azt nyerjük, hogy

$$pq + qr + rp + pt + qt + rt = 12 \left( u^2 + v^2 + w^2 + uv + vw + wu \right)^2$$

Kiszámíthatjuk  $p^2 + q^2 + r^2 + t^2$  értékét is:

$$p^2 + q^2 + r^2 + t^2 =$$

$$\left( (v + w)^2 + v^2 + w^2 \right)^2 + \left( u^2 + (w + u)^2 + w^2 \right)^2 + \left( u^2 + v^2 + (u + v)^2 \right)^2$$



$$+4(u + v + w)^4 = 12(u^2 + v^2 + w^2 + uv + vw + wu)^2$$

Ezzel a segédétel bizonyítást nyert.

**Egy összefüggés levezetése.** A továbbiakban a segédételt fogjuk felhasználni az az  $A''TC''$  szabályos háromszög és a  $B''$  pont vonatkozásában. Tehát most

$$p = (A''B'')^2 = 4 - (\sqrt{3} \sin \zeta - \sin \eta)^2$$

$$q = (TB'')^2 = 4 \cos^2 \eta$$

$$r = (C''B'')^2 = 4 - (\sqrt{3} \sin \zeta + \sin \eta)^2$$

$$t = (A''C'')^2 = 12 \cos^2 \zeta = 12 - 12 \sin^2 \zeta$$

Az egyszerűbb, tömörebb képletek érdekében bevezetjük az  $y = \sin \eta$ ,  $z = \sin \zeta$

jelöléseket. Tehát

$$\begin{aligned}p &= 4 - (\sqrt{3}z - y)^2 \\q &= 4 - 4y^2 \\r &= 4 - (\sqrt{3}z + y)^2 = \\t &= 12 - 12z^2\end{aligned}$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned}& p^2 + q^2 + r^2 + t^2 \\&= \left(4 - (\sqrt{3}z - y)^2\right)^2 + \left(4 - 4y^2\right)^2 + \left(4 - (\sqrt{3}z + y)^2\right)^2 + \left(12 - 12z^2\right)^2 \\&= 6 \left(6y^2z^2 - 8y^2 + 3y^4 - 56z^2 + 27z^4 + 32\right)\end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} & (p + q + r)t \\ = & \left( 4 - (\sqrt{3}z - y)^2 + 4 - 4y^2 + 4 - (\sqrt{3}z + y)^2 \right) (12 - 12z^2) \\ = & 72 (z^2 - 1) (y^2 + z^2 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pr &= \left( 4 - (\sqrt{3}z - y)^2 \right) \left( 4 - (\sqrt{3}z + y)^2 \right) \\ (p + r)q &= \left( 4 - (\sqrt{3}z - y)^2 + 4 - (\sqrt{3}z + y)^2 \right) (4 - 4y^2) \\ & 8 (y^2 - 1) (y^2 + 3z^2 - 4) \end{aligned}$$

A segédtétel alapján

$$p^2 + q^2 + r^2 + t^2 = (p + q + r)t + pr + (p + r)q$$

Ebből némi számolás révén azt nyerjük, hogy

$$6(6y^2z^2 - 8y^2 + 3y^4 - 56z^2 + 27z^4 + 32) - 72(z^2 - 1)(y^2 + z^2 - 2) - (4 - (\sqrt{3}z - y)^2)(4 - (\sqrt{3}z + y)^2) - 8(y^2 - 1)(y^2 + 3z^2 - 4) = 0$$

Egyszerűsítések után ebből kijön, hogy  $-6y^2z^2 + 8y^2 + y^4 - 8z^2 + 9z^4 = 0$ . Figyelembe véve, hogy  $z^2 \leq 1$ , azt kapjuk hogy  $y^2 = 3z^2 - 4 + 4\sqrt{1 - z^2}$ . Tekintettel arra, hogy  $\sqrt{1 - z^2} = \cos \zeta$  és hogy  $y^2 = 1 - \cos^2 \eta$ , végezetül azt nyerjük, hogy

$$\cos \eta = \sqrt{3 \cos^2 \zeta - 4 \cos \zeta + 2} \quad (1)$$

**A „Spidron Formula”.** Erdély Dániel és Kiss Gergő közös eredménye az úgynevezett *Spidron Formula* (1998–2018). Pár hete mutatták be egy előadáson azt a

képletet, mely a jelen dolgozat jelölésrendszerében így szól:

$$\eta = \arcsin \sqrt{4 \cos \zeta - 3 \cos^2 \zeta - 1} \quad (2)$$

Könnyen látható, hogy a (2) képlet az (1) képletből könnyen levezethető. Erdély és Kiss bizonyítása a (2) képletre meglehetősen bonyolult, és 3-dimenziós, mátrixszorzásokkal megvalósított geometriai transzformációkat igényel.

Néhány éve *Szilassi Lajos* is talált egy összefüggést a  $\zeta$  és  $\eta$  szögek között:

$$\eta = \arctan \sqrt{\frac{-1 + 4 \cos \zeta - 3 \cos^2 \zeta}{2 - 4 \cos \zeta + 3 \cos^2 \zeta}} \quad (3)$$

Az ismert trigonometrikus azonosságok felhasználásával könnyen megmutatható, hogy a (3) képlet is egyenértékű az (1) és (2) képletekkel.

A hivatkozott munkákban sok további érdekesség olvasható a spidronokról. Az interneten videó is található, mely mozgásban mutatja be a csillaghatszög felgyűrődését.

## **Hivatkozások.**

1. Erdély D.: Spidron jegyzetlapok I, Ponticulus Hungaricus 10 (2006).

<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/spidron-note1.html>

2. Erdély D.: Spidron jegyzetlapok II, Ponticulus Hungaricus 10 (2006).

<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/spidron-note2.html>

3. Erdély D.: Spidron jegyzetlapok III, Ponticulus Hungaricus 10 (2006).  
<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/spidron-note3.html>

4. Erdély D.: Spidron jegyzetlapok IV, Ponticulus Hungaricus 11 (2007).  
<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/spidron-note4.html>

5. Erdély D.: Spidron jegyzetlapok V, Ponticulus Hungaricus 11 (2007).  
<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/hidverok/spidron-note5.html>

6. Erdély D.: Spidron rendszerről. 2002. SULiNET Hírmagazin.  
<http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/tudomany/a-spidron-rendszerrol>

7. Erdély D.: Spidron rendszer. 2004.

Régi-Új Magyar Építőművészet – „Post Scriptum” kiegészítés.

8. Erdély D.: Some surprising new properties of the spidrons. 2006. (translated from Magyar by B. Földvári), Bridges Proceedings (2005) 179–186.

9. Erdély D.: Hexagons and their inner world. Bridges Proceedings(2013)571-572  
<http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-571.html>

10. Erdély, D.: Concept of Spidron System. Proc. of “Sprout-Selecting” Conference: Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching (ed. by C. Sárvári); Pécs, Hungary (2004) 68–77.



11. Erdély, D. and Pelletier, M.: Spidron domain expanding spidron universe, Bridges Proceedings (2006) 549–550.

<http://archive.bridgesmathart.org/2006/bridges2006-549.html>

12. Wikipedia: Spidron. 2018.

<https://en.wikipedia.org/wiki/Spidron>

13. Wikipedia: Example of Spidron. 2011.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spidron.svg>

14. Wikipedia: Minkowski addition. 2018.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski\\_addition](https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_addition)

15. Wikiszótár. Csillaghatszög. 2018.

<https://hu.wiktionary.org/wiki/csillaghatsz%C3%B6g>

16. Fenyvesi K.: Bridges: A world community for mathematical art, The Mathematical Intelligencer 38 (2016).

<https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/50042>

17. Peterson, I.: Swirling seas, crystal balls: Spirals of triangles crinkle into intricate structures. Science News 170 (2006) 266–268

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/4017499>

18. Szilassi, L.: The right for doubting – and the necessity of doubt – Thoughts. Concerning the Analysis of Erdély's Spidron System; Proc. of "Sprout-Selecting" Conference: Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching (ed. by C. Sárvári); Pécs, Hungary (2004) 78–96.

<http://math.bme.hu/~hujter/doubt.pdf>

19. Szilassi, L.: A kételkedés joga – és kötelessége. (Gondolatok az Erdély-féle spidron-rendszer vizsgálata kapcsán), Kézirat (2008).

<http://math.bme.hu/~hujter/jog.pdf>

20. Hwang, K.C.: Broadband circularly-polarised Spidron fractal slot antenna, IEEE Xplore 45 (2009) 3–4.

<https://ieeexplore.ieee.org/document/4733072/>

21. Bellos, A.: The science of fun, The Guardian, News/Science; 31 May (2008) 32.

22. Bellos, A.: Alex's Adventures in Numberland, Bloomsbury (2010) 249–250.

<https://www.bloomsbury.com/uk/alex-s-adventures-in-numberland-9781408811146/>

<https://100-vampirenovels.com/pdf-novels/alexs-adventures-in-numberland-by-bellos-alex-free/45-page>

23. van Ballegooijen, W., Galiunas, P., and Erdély, D.: Spidronised space-fillers, Bridges Proceedings (2009) 271–278.

[http://spidron.hu/spidronised\\_spacefillers/images/presentation/Bridges2009\\_SSF.pdf](http://spidron.hu/spidronised_spacefillers/images/presentation/Bridges2009_SSF.pdf)

24. Clifford, P.: The Math Book / 250 Milestones in the History of Mathematics; Sterling, New York – London (2009) 470–471.

25. Erdély, D.: Spidron system: A flexible space-filling structure, POLYHEDRA; Symmetry, Culture and Science 11 (2000) 307–316.

26. The new spidron. 2014.

<http://www.spidron.hu/>

27. Spidron System. 2014.

<http://edan.szhaz.org/SpidroNew/index.html>

28. Erdély, D.: Spidron system (2018)

<https://spidron.hu/edan.szhaz.org/SpidroNew/>

29. Wunmi: Tiling with spidrons. Prezi.

<https://prezi.com/614vuxo1mpaq/tiling-with-spidrons/>

30. Stoicoviciu, L., Samoilă, G., Lorenzi, M. G., and Francaviglia, M.: Painting in geometric key, Bridges Proceedings (2011) 455–458.

<http://archive.bridgesmathart.org/2011/bridges2011-455.html>