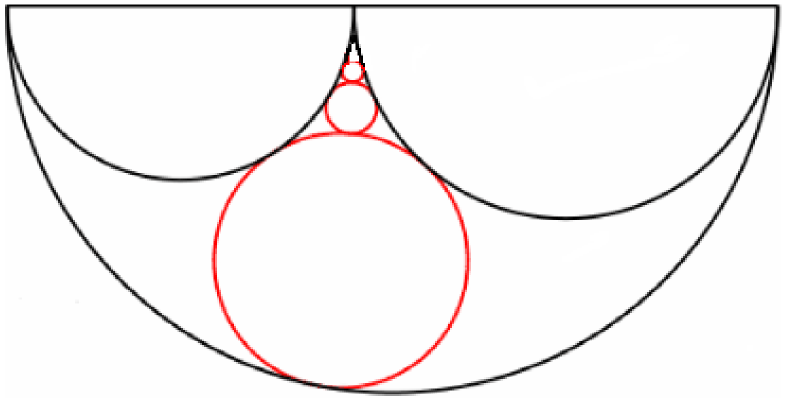
Haladvány Kiadvány 2018-07-07

Egy 99-szer kisebb körről

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. Egyszerűbb formulával kimondjuk és bizonyítjuk *Tahir* és *Lucca* tételének egy változatát. Az eredményt felhasználjuk a címben jelzett 99-szer kisebb körre vonatkozó feladat megoldására.



Egy feladat kitűzése. Tekintsük az első ábrán látható fekete félköröket és piros köröket. A piros körök sorozata még folytatható lenne. A legnagyobb félkör átmérőjét egységnyinek vesszük. Megkérdezzük, mi a második és a harmadik félkörök átmérőjének aránya akkor, amikor a legkisebb piros kör átmérője éppen 99-edrésze a legnagyobb félkör átmérőjének.

Tahir és Lucca egy tételének egy változata és annak bizonyítása. Tegyük fel, hogy a legnagyobb félkör átmérője egységnyi. Valamely alkalmas x pozitív számra tegyük fel, hogy a második legnagyobb félkör átmérője $\frac{1}{2}+x$, a harmadik félköré pedig $\frac{1}{2}-x$. Tehát $0 \leq x < \frac{1}{2}$. Jelölje $r_1(x)$ a legnagyobb piros kör átmérőjét, $r_2(x)$ a második legnagyobbét, és így tovább. Világos, hogy minden fix pozitív egész n-re az $r_n(x)$ függvény folytonos, és

$$\lim_{x \to (1/2)^-} r_n(x) = 0$$

Tahir (2006) és *Lucca* (2018) kimondtak egy tételt — sajnos a bizonyítást nem közölték —, mely a következő formulával egyenértékű:

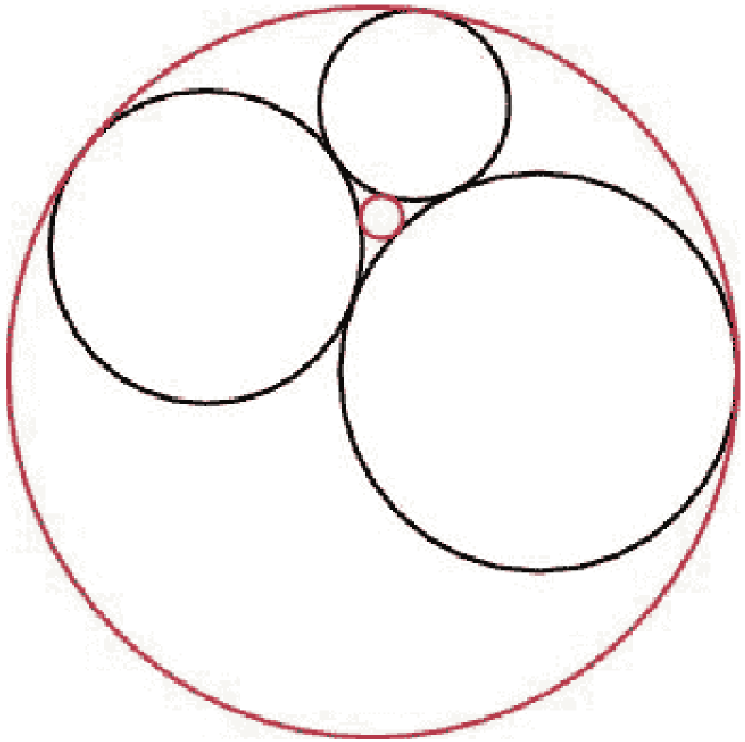
Tétel.

$$r_n(x) = \frac{2n^2}{4n^2 + 4x^2 - 1} - \frac{1}{2}$$

Láthatjuk, hogy a jobb oldal folytonos függvénye x-nek és az értéke $x = \frac{1}{2}$ esetén valóban 0.

Itt most közlünk egy bizonyítást a fenti formulára. Kiindulunk *Descartes* híres tételéből, mely négy, egymást kölcsönösen érintő kör sugarára vonatkozik. A második ábrán öt kört látunk, ahol a három fekete kör lesz az első három ρ_1, ρ_2, ρ_3 sugárral, a negyedik kör pedig vagy a piros külső kör R sugárral, vagy a piros belső kör r sugárra. Descartes tétele szerint — a bizonyítás sok helyen megtalálható az interneten — R illetve r a következő, a ρ ismeretlenre felírt másodfokú egyenlet egyetlen pozitív megoldása, ahol R esetében az s paraméter értéke -1, r esetében pedig 1:

$$\frac{2}{\rho_1^2} + \frac{2}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_3^2} + \frac{2}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{s}{\rho}\right)^2$$



Először a $\rho = \frac{1}{2}, \rho_1 = \frac{1+2x}{4}, \rho_2 = \frac{1-2x}{4}$ szereposztással alkalmazzuk a fenti képletet, és megkapjuk az

$$\frac{2}{\left(\frac{1+2x}{4}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{1-2x}{4}\right)^2} + \frac{2}{r^2} + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{\frac{1+2x}{4}} + \frac{1}{\frac{1-2x}{4}} + \frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2$$

egyenlet megoldására, hogy

$$r = \frac{1-x^2}{6+8x^2}$$

Ez valóban megegyezik $r_1(x)$ értékével.

Most $n = 2, 3, 4, \cdots$ esetén r_{n-1}-ből újra csak Descartes tételével határozzuk meg $r_n(x)$ értékét. A következő egyenlet megoldása lesz $r_n(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\left(\frac{1+2x}{4}\right)^2}+\frac{2}{\left(\frac{1-2x}{4}\right)^2}+\frac{2}{r_n^2(x)}+\frac{2}{r_{n-1}^2(x)}\\
=\;&\left(\frac{1}{\frac{1+2x}{4}}+\frac{1}{\frac{1-2x}{4}}+\frac{1}{r_n(x)}+\frac{1}{r_{n-1}(x)}\right)^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Elegendő megmutatnuk, hogy a fenti tételben szereplő $r_n(x)$ kielégíti a fenti (1) egyenletet. A következő behelyettesítésekkel élhetünk:

$$
\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{2n^2}{4n^2+4x^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1-4x^2}{8n^2-2+8x^2}\\
r_{n-1}(x) &= \frac{2(n-1)^2}{4(n-1)^2+4x^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1-4x^2}{8n^2-16n+6+8x^2}
\end{aligned}
$$

Ezért

$$\frac{1}{r_n(x)} + \frac{1}{r_{n-1}(x)}$$

helyére ez írható:

$$\frac{8n^2 - 2 + 8x^2}{1 - 4x^2} + \frac{8n^2 - 16n + 6 + 8x^2}{1 - 4x^2} = \frac{4(4n^2 - 4n + 1)}{1 - 4x^2}$$

Másrészt

$$\frac{2}{r_n^2(x)} + \frac{2}{r_{n-1}^2(x)}$$

helyére ez írható:

$$\frac{2\left(8n^2 - 2 + 8x^2\right)^2}{\left(1 - 4x^2\right)^2} + \frac{2\left(\left(8n^2 - 16n + 6 + 8x^2\right)^2\right)}{\left(1 - 4x^2\right)^2}$$

Az (1) képlet bal oldala tehát ez lesz:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\left(\frac{1+2x}{4}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{1-2x}{4}\right)^2} \\ & + \frac{2\left(8n^2 - 2 + 8x^2\right)^2}{\left(1-4x^2\right)^2} + \frac{2\left(\left(8n^2 - 16n + 6 + 8x^2\right)^2\right)}{\left(1-4x^2\right)^2} \\ = \quad & \frac{16\left(4n^2 - 4n + 3\right)^2}{\left(1-4x^2\right)^2} \end{aligned}$$

A jobb oldal pedig ez:

$$\left(\frac{1}{\frac{1+2x}{4}} + \frac{1}{\frac{1-2x}{4}} + \frac{4(4n^2 - 4n + 1)}{1-4x^2}\right)^2 = \frac{16\left(4n^2 - 4n + 3\right)^2}{\left(1-4x^2\right)^2}$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Az eredeti feladat megoldása. Az $r_3(x) = \frac{1}{2\cdot 99}$ egyenlet pozitív megoldását tekintjük:

$$\frac{2\cdot 3^2}{4\cdot 3^2+4x^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cdot 99}$$

Az kapjuk, hogy $x = \frac{2}{5}$. Tehát $10 : 9 : 1$ arányban kell a félkörök átmérőjét felvenni, ha azt akarjuk, hogy az első ábrán a legkisebb piros kör átmérője éppen 99-szer kisebb legyen, mint a legnagyobb félkör átmérője.

Hivatkozások.

1. Tahir, H.: On points of contact in infinite chains. Austral . Math. Soc. Gaz. **33** (2006) 273–281.
http://www.austms.org.au/Gazette+-+past+issues

2. Lucca, G.: A note on a Pappus sangaku problem and a family of integer sequences. Sangaku J. Math. **2** (2018) 1–2.
http://www.sangaku-journal.eu

3. Wikipaedia: Descartes' theorem. 2018.
https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_theorem