Egyenletrendszer megoldása vektoriális szorzattal

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2018.11.11.

Haladvány Kiadvány , http://math.bme.hu/~hujter/181111.pdf

Egy elsőéves diákom keresett meg izgatottan felfedezésével:

Állítás: *Tekintsük az*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{array}\right\} \tag{1}$$

egyenletrendszert, legyenek $\overrightarrow{a} := (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} := (b_1, b_2, b_3)$ *és* $\overrightarrow{c} := \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *vektoriális szorzat,* $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Ekkor az (1) *egyenletrendszer gyökei (ha* $c_3 \neq 0$*)*:

$$x = \frac{-c_1}{c_3} \quad \textit{és} \quad y = \frac{-c_2}{c_3}\ . \tag{2}$$

Bizonyítás: $\overrightarrow{c} := \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (c_1, c_2, c_3) = (a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ -a_1b_3 + a_3b_1\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1)$, és középiskolai ismeretekkel könnyen látható, hogy (2) kielégíti az (1) egyenletrendszert, hiszen

$$\frac{-c_1}{c_3} = \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \textit{és} \quad \frac{-c_1}{c_3} = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{3}$$

(ez éppen a Cramer szabály $n = 2$ speciális esete). □

Megjegyzések: i) A vektoriális szorzat

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

alakú definíciója alapján a fenti állítás nem meglepő, csak eddig én nem vettem észre.

ii) A problémának érdekes geometriai vetületei vannak.

Az (1) egyenletrendszer két sora az $[x,y]$ síkon két egyenes, e_a és e_b egyenlete, melyek metszéspontja a (2) megoldás, ezt a pontot jelöljük $P_0=(x_0,y_0)$ -al. E két egyenes *normálvektorai* az $\overrightarrow{a^o}=(a_1,a_2)$ és $\overrightarrow{b^o}:=(b_1,b_2)$ vektorok (melyek az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektoroknak az $[x,y]$ síkra való vetületei).

Másrészt, az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ háromdimenziós vektorokat tekinthetjük két sík, S_a és S_b síkok normálvektorainak, melyek egyenletei $a_1x+a_2y+a_3z=d_1$ és $b_1x+b_2y+b_3z=d_2$. Természetes követelmény, hogy az S_a és S_b síkoknak az $[x,y]$ síkkal való metszésvonalai pontosan az e_a illetve e_b egyenesek legyenek, vagyis, $z=0$ (és megfelelő x és y) esetén $a_1x+a_2y+a_3\cdot 0=d_1$ és $b_1x+b_2y+b_3\cdot 0=d_2$ azaz $d_1=a_3$ és $d_2=b_3$ következik. Tehát az S_a és S_b síkok egyenletei:

$$S_a: a_1x+a_2y+a_3z=a_3 \quad \text{és} \quad S_b: b_1x+b_2y+b_3z=b_3\ . \tag{5}$$

Ebből az is következik, hogy az S_a és S_b síkok mindegyike átmegy a $Q\,(0,0,1)$ ponton!

A $\overrightarrow{c}$, definíciója miatt, éppen az S_a és S_b síkok metszésvonalának irányvektora, és (mivel $P_0\in e_a\cap e_b\subset S_a\cap S_b$): $\overrightarrow{c}\parallel QP_0$, azaz

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda\cdot(x_0-0)=\lambda\cdot x_0 &(6)\\ c_2 &= \lambda\cdot(y_0-0)=\lambda\cdot y_0 &(7)\\ c_3 &= \lambda\cdot(0-1)=-\lambda \end{aligned}$$

ahonnan $c_3\neq 0$ esetén (2) következik.

Összefoglalva: P_0 az e_a , e_b egyenesekre és a $Q\,(0,0,1)$ pontra illesztett S_a , S_b síkok metszésvonala által az $[x,y]$ síkból kimetszett pont.

Diszkusszió: Az (1) egyenletrendszernek (2) pontosan akkor *nem ad megoldását*, ha a $c_3=a_1b_2-a_2b_1$ nevező nulla, azaz $\overrightarrow{a^o}$ és $\overrightarrow{b^o}$ párhuzamosak, vagyis az e_a , e_b egyenesek párhuzamosak. Ebből csak $e_a=e_b$ esetén következik az S_a és S_b síkok párhuzamossága! Az **ii)** -ben leírt geometriai problémának pedig pontosan akkor *nincs* gyöke, ha $\overrightarrow{c}$ párhuzamos az $[x,y]$ síkkal, ami pontosan akkor teljesül, ha $S_a\parallel S_b$ vagy $S_a\nparallel S_b$ de $e_a\parallel e_b$.

Összefoglalva: $e_a\nparallel e_b \iff \overrightarrow{c}\nparallel[x,y] \iff P_0=\overrightarrow{c}\cap[x,y]$ és P_0 egyértelmű, ha $e_a\parallel e_b$ de $e_a\neq e_b$ akkor $S_a\nparallel S_b$ de $\overrightarrow{c}\parallel[x,y]$ és P_0 nem létezik,
ha $e_a=e_b$ akkor $S_a=S_b$ és $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}\parallel[x,y]$ és P_0 -t sem (2) sem (6) nem adja meg.

Érdemes felrajzolni az e_a , e_b egyeneseket, az S_a , S_b síkokat, a P , Q pontokat és az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a^o}$, $\overrightarrow{b^o}$ vektorokat!