Haladvány Kiadvány 2019-05-11

A Pascal-háromszög bizonyos soraiban a különbségek maradékáról

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Néhány Catalan-szám és a Pascal-háromszög néhány sorának oszthatósági tulajdonságait vizsgáljuk.

Lemma. Legyen p páratlan prím. Ekkor $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}$ esetén

$$\binom{p-2}{2m} \equiv 2m + 1 \mod p$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy

$$\binom{p-2}{2m} - (2m+1)$$

osztható p-vel. Mivel $2m < p$, ehhez elegendő megmutatnunk, hogy a fenti képlet $(2m)!$-szorosa osztható p-vel. Mármost $\bmod p$ számolva

$$\begin{aligned}
& \binom{p-2}{2m}(2m)! - (2m+1)(2m)! \\
= \ & (p-2)(p-3)\cdots(p-2m)(p-2m-1) - (2m+1)! \\
\equiv \ & (-2)(-3)\cdots(-2m)(-2m-1) - (2m+1)! = 0
\end{aligned}$$

Tétel (Aebi és Cains, 2008). Jelölje C_n az n-edik Catalan-számot. Ha p egy $4k+1$ alakú prím, akkor $C_{2k} \equiv 2 \mod p$. Ha pedig p egy $4k+3$ alakú prím, akkor $C_{2k+1} \equiv p-2 \mod p$.

Bizonyítás. Mivel

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2}$$

ezért a $p = 4k+1$ esetben

$$\begin{aligned} C_{2k} &= \frac{(4k)!}{(2k+1)\left((2k)!\right)^2} = \frac{4k \cdot (p-2)!}{2k(2k+1)((2k)!)((2k-1)!)} \\ &= \frac{2}{2k+1} \cdot \binom{p-2}{2k} \end{aligned}$$

Így $\bmod p$ számolva a lemma miatt

$$\begin{aligned} (2k+1)(C_{2k}-2) &= 2 \cdot \binom{p-2}{2k} - 2(2k+1) \\ &\equiv 2(2k+1) - 2(2k+1) = 0 \end{aligned}$$

Mivel $2k+1 < p$, ezért a fentiből következik, hogy $C_{2k} \equiv 2 \mod p$.

Másrészt a $p = 4k + 3$ esetben

$$\begin{aligned} C_{2k+1} &= \frac{(4k+2)!}{(2k+2)\left((2k+1)!\right)^2} = \frac{(4k+2)\cdot(p-2)!}{(2k+2)(2k+1)((2k)!)((2k+1)!)} \\ &= \frac{1}{k+1}\cdot\binom{p-2}{2k} \end{aligned}$$

Így mod p számolva a lemma miatt

$$\begin{aligned} (k+1)\left(2 + C_{2k+1}\right) &= 2k + 2 + \binom{p-2}{2k} \\ &\equiv 2k + 2 + 2k + 1 = p \equiv 0 \end{aligned}$$

Ebből következően $2 + C_{2k+1} \equiv 0$, azaz $C_{2k+1} \equiv p - 2$.

A lemma egy másik következménye a következő tétel

Tétel. A Pascal-háromszögnek az $1, p-2, \ldots$ kezdetű sorában, ha p páratlan prím, nincs két különböző értékű elem, melyek különbsége osztható lenne p-vel.

Bizonyítás. A Pascal-háromszög sorának elemeit sorban jelöljük így: $a_0 = 1$, $a_1 = p - 2$, ... Tegyük fel, hogy $a_j \neq a_k$ esetén fennáll, hogy $a_j - a_k \equiv 0 \mod p$. Mivel $a_j = a_{p-2-j}$, $a_k = a_{p-2-k}$, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy j is és k is páros. Legyen $j = 2m$ és $k = 2n$. A lemma miatt $a_j \equiv 2m + 1 \mod p$ és $a_k \equiv 2k + 1 \mod p$. Tehát $2m + 1 \equiv 2n + 1 \bmod p$, azaz $m = n$. Ez ellentmond annak, hogy $a_{2m} \neq a_{2n}$.

Következmény. Gyenes Zoltán és Hujter Bálint a közelmúltban ezt kérdezte: Páratlan p prímre hányféle p szerinti osztási maradékot adnak a Pascal-háromszög $1, p-2, \ldots$ kezdetű sorának elemei? A fenti tétel szerint a válasz $\frac{p-1}{2}$, hiszen a kérdezett sorban összesen $\frac{p-1}{2}$ darab különböző értékű elem van. Ez a $\frac{p-1}{2}$ darab osztási maradék egyébként éppen az összes páratlan szám 1-től $p - 2$-ig.

Hivatkozások

Christian Aebi and Grant Cairns, Catalan numbers, primes, and twin primes, Elem. Math. 63 (2008) 153–164.

Gyenes Zoltán és Hujter Bálint, B.5024. feladat, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2019. április.