Haladvány Kiadvány 2019-05-25

Jutunk-e hatról ötre szögharmadolásban?

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Márkus Péter
markuspeterfot@gmail.hu

Tartalmi összefoglaló: Ebben a dolgozatban egy tanulságos geometriai–algebrai–számelméleti vita történetét meséljük el. Mivel 6 fokos szöget tudunk szerkeszteni, de 5 fokosat nem, nagyon izgatóak a kérdések: Miért nem? Lehetne-e mégis? Ha valaki állítja, hogy megcsinálja, mire figyeljünk az ellenőrzéskor?

A cím magyarázata. Mivel 6 fokos szöget tudunk szerkeszteni, de 5 fokosat nem, ezért úgy szeretnénk ötről hatra, pontosabban hatról ötre jutni, hogy például 5 fokos szöget is akarunk szerkeszteni. Ha sikerrel járnánk, természetesen $6-5=1$ fokos szöget is megkapnánk, abból pedig duplázással 2 fokos szöget nyerhetnénk, tehát harmadolni tudnánk egy 6 fokos szöget. Ha 9 fokos szöget kell harmadolnuk, azt bizton meg tudjuk tenni, hiszen az eredmény a 6 fokos szög fele. Természetesen 333 fokos szöget is tudunk harmadolni, de tudunk-e 66 fokos szöget?

A problémakör felvetése. A jelen dolgozat szerzői közül Mihály matematikus, Péter nem. Viszont Péter az, aki kitalált egy szögharmadoló eljárást. Miután saját maga alaposan ellenőrizte, megmutatta több embernek. Nem találtak benne hibát. Az egyik ellenőr — akit Mihály régóta jól ismer, és nagyon jó matematikusnak tart — elfogadta a módszer helyességét, de azt javasolta Péternek, hogy keressen meg még egy másik szakembert is. Így akadt rá — majdhogynem véletlenül — Mihályra.

Péter és Mihály először óvatosan tárgyaltak egymással. Péter állította, hogy módszere helyes. Tényleg tud szögeket harmadolni euklideszi eljárással. Mihály elmondta, hogy kételkedik. A tudomány jelenlegi állása szerint például 54 fokos szöget is és 63 fokos szöget is tud minden matematikai versenyeken eredményes középiskolás harmadolni, de 60 fokosat a világon senki. Sőt keresett is Péternek az interneten olyan angol és magyar nyelvű bizonyításokat, melyekből kiderül, hogy 60 fokos szöget harmadolni nem lehetséges a hagyományos euklideszi szerkesztésekkel. Tulajdonképpen minden euklideszi szerkesztésben a körzőt elegendő egyetlen egyszer használni: Az ellenfelünk adhat nekünk egy pontot a síkon, és rögzíthet egy körzőnyílást. Nekünk a körzőt a kapott pontba kell leszúrnuk, berajzolunk a kapott sugárral egy teljes kört, aztán a körzőt eldobhatjuk. Már csak egy egyélű, jelöletlen vonalzóra van szükség. Az sem baj, ha az rövid. Például az összetört, lejárt bankkártyánk egy szélső darabkája is elég. Már csak ezzel a pici vonalzódarabbal is beleszerkeszthetünk a megrajzolt körünkbe például egy szabályos 60-szöget. Így 18 fokos szöget is, 21 fokos szöget is nyerhetünk, de 20 fokosat nem.

A vita fokozódása. Mihály felszólította Pétert, hogy védje magát, és előrándotta a kardját egy 60 fokos szög formájában, és kérte Pétert, harmadolja, ha tudja. Az is elég, ha Péter szerkeszt egy szabályos 9-szöget. Péter elmondta, hogy sok szögön kipróbálta a módszerét, de konkrétan 60 fokon nem. És először megmutatta egészen pontosan $49.0909\ldots$ fokos szögön. Hiba nem találtatott!

Álljon meg a nászmenet! Nagy numerikus pontosság nekünk nem elegendő! Ugye a szög szakaszos tizedes törtben értendő? Mivel $11 \cdot 49.0909\ldots = 539.9999\ldots$, azaz 540, ezért most a harmadolandó szög teljes pontossággal $540/11$ fokos. Mihály mondta Péternek, hogy ha itt a nevezőben 17 lenne 11 helyett, akkor már

Gauss is meg tudta volna szerkeszteni két évszázada az $540/17$ fokos szög harmadát, hiszen szabályos 17-szöget tudott szerkeszteni, ebből következően $180/17$ fokos szöget is, ami pedig az $540/17$ foknak éppen a harmada. Node $180/11$ fokos szöget még Gauss sem tudott szerkeszteni, sőt úgy tudta, hogy nem is lehet, mert a szerkeszhetőséghez (néhány más feltétel kielégítése mellett) a nevezőben lévő páratlan prímnek 2-es számrendszerben olyan alakúnak kell lenni, hogy csak a legelején és a legvégén lehet 1-es számjegy. Márpedig 2-es számrendszerben átírva a tizenegyet ezt kapjuk 1011. Mindent összegezve: Péter konstrukciója nem lehet jó, mert ellentmond a matematika jól ismert eredményeinek! De Péter munkája kifogástalan!

Hol a hiba a gondolatmenetekben? Mihály először azt gondolta, ott követte el Péter a hibát (vagy hiányosságot), hogy az inputról nem ellenőrizte, hogy tényleg $540/11$ fokos-e. De aztán később rájött, hogy ezzel nincs nagy baj, hiszen ha a kapott szöget 11-szer vesszük, akkor látjuk, tényleg 540 fokot kapunk-e. Később Mihály rájött, hogy Péter szerkesztésétől függetlenül is tud szerkeszteni egy $180/11$ fokos szöget, ha kiindulásul felhasználja a kapott garantáltan $540/11$ fokos szöget. Mivel $540/11 - 16 \cdot 3 = 12/11$, ezért $12/11$ fokos szög megszerkeszthető. Márpedig $180/11 = 15 \cdot 12/11$. Készen is vagyunk! Az eb ott van elhantolva, hogy a jól előkészített, garantált szögnagyságú input már eleve tartalmazta a szög harmadolhatóságát!

Egy rafináltabb példa. Megérezvén, hogy talán kifogott Mihályon, Péter egy másik példával is előjött. Itt a harmadolandó szög nagysága fokokban:

$$55.8620689655172413793103448275\ldots$$

Ez egy periódusos tizedes tört, ahol a peródusban éppen a fent kiírt 28 tizedesjegy szerepel. A fokokban kifejezett pontos érték tehát közönséges törtként ez:

$$55 + \frac{8620689655172413793103448275}{9999999999999999999999999999} = \frac{1620}{29}$$

Mivel $1620/(3 \cdot 29) \approx 18.621$, és $1620/29 - 18 \cdot 3 = 54/29$, azért az inputból könnyen nyerünk $54/29$ fokos szöget, aminek a 10-szerese éppen a kívánt szögharmad. Most is Péternek van igaza, mert a $1620/29$-fokos szög harmadolható.

További példák gyárthatók. Legyenek p és q pozitív egész számok majdnem tetszőlegesen, csak arra vigyázzunk, hogy q ne legyen 3-mal osztható. Állítjuk, hogy ha kapunk egy szöget, melynek garantált nagysága fokokban mérve $9p/q$, akkor euklideszi szerkesztéssel harmadolni tudjuk, azaz tudunk szerkeszteni egy $3p/q$ fokos szöget. Most azzal nem foglakozunk, hogy ki és hogyan garantálja, hogy az inputként kapott szög nagysága fokokban mérve valamely alkalmas p-re és q-ra éppen $9p/q$ nagyságú. De ha ez így van, akkor euklideszi szerkesztéssel könnyen megtaláljuk a relatív prím p és q számokat. Mivel a $3p$ és q relatív prímek, a jól ismert számelméleti eszközökkel találunk olyan a és b egész számokat, hogy

$3pa + qb = 1$ legyen. Az a és b egész számok ismeretében megszerkeszthetünk egy $(9p/q)a + 3b$ fokos szöget, és ezzel készen leszünk, mert $p((9p/q)a + 3b) = 3p\,(3pa + qb)\,/q = 3p/q$.

Akkor most kinek van igaza? Péter módszere tehát lehet helyes. Van azonban két csapda. Egyrészt az a gond, hogy garantálni kell, hogy az input elfogadható legyen a szögharmadoláshoz. Másrészt a lehetséges, harmadolásra váró szögeknek csak nulla százalékát tudja kezelni az algoritmus. Továbbra sem tudunk tisztán euklideszi szerkesztéssel a semmiből 5 fokos szöget szerkeszteni, azaz míg a 18 fokos szöget tudjuk harmadolni, addig a 15 fokos szöget már nem. Érdekesség, hogy például a $15 + 3/(8 \cdot 17)$ fokos szöget is és a $15 - 6/(8 \cdot 17)$ fokos szöget is tudjuk harmadolni, így a két szög számtani közepét is, de a $2 : 1$ arányú súlyozott számtani közepüket már nem. Itt a 8-as helyére tetszőlegesen nagy 2-hatvány is írható, így tetszőleges pontossággal tudjuk a 15 fokot harmadolni, de teljes pontossággal továbbra sem.

Egy paradoxon zárásnak. Öregapánk zsebórája még jól jár, csak naponta pár másodpercet késik. Sohasem mutatja tehát a pontos időt. Viszont ha tovább gyengül benne a rúgó, akkor naponta már perceket is késik. Így beállítás nélkül is lesz minden esztendőben néhány pillanat, amikor pontos időt mutat az óra. Minél jobban gyengül a rugó, annál gyakrabban mutatja a pontos időt. Ha pedig abbahagyjuk a szokást, hogy minden nap felhúzzuk az órát, akkor már naponta kétszer is pontos időt kapunk. A gond az, hogy nem tudjuk, mikor kapjuk és mikor nem a pontos időt, ha máshonnan nem tudjuk, hány óra van!

Hivatkozások

Kovács Zoltán: Geometriai szerkesztések,
`http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/`

Magyar Wikipédia: Szerkeszthető sokszögek
https://hu.wikipedia.org/wiki/Szerkeszthet%C5%91_soksz%C3%B6gek

Magyar Wikipédia: Szögharmadolás
https://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%B6gharmadol%C3%A1s

Magyar Wikipédia: Kilencszög
https://hu.wikipedia.org/wiki/Kilencsz%C3%B6g

Magyar Wikipédia: Tizenegyszög
https://hu.wikipedia.org/wiki/Tizenegysz%C3%B6g

Magyar Wikipédia: Tizenhétszög
https://hu.wikipedia.org/wiki/Tizenh%C3%A9tsz%C3%B6g

Magyar Wikipédia: Relatív prímek

https://hu.wikipedia.org/wiki/Relat%C3%ADv_pr%C3%ADmek