Haladvány Kiadvány 2019-06-05

A kocka árnyékáról

Hujter Mihály   hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló: Bezdek András magyar–amerikai professzor egyik ötletétől indíttatva bizonyítjuk a következőt: Tekintsük egy kocka éleinek vázát lebegni általános helyzetben. A kocka árnyéka a nap irányára merőleges helyzetű síkon 6 darab egymáshoz illesztett paralelogrammának látszik, amik együtt hatszöget alkotnak. Az árnyékon látható 12 élhosszúságból képezzük a térben egy téglatest élvázát a lehető legtermészetesebb módon. Állítjuk, hogy a téglatest testátló-hossza — a kocka eredeti helyzetétől függetlenül — mindig megegyezik a kocka lapátló-hosszával.

Matematikai megfogalmazás. Közismert tény, hogy az xyz-koordinátarendszerben egy általános helyzetű egységkocka merőleges vetülete az xy-síkra egy centrálszimmetrikus konvex hatszög. A hatszög oldalhosszai sorban p, q, r, p, q, r, ahol p, q és r mindegyike szigorúan 0 és 1 közötti. Ki fog derülni, hogy $p^2 + q^2 + r^2 = 2$, azaz a p, q, r-élű téglatest testátló-hossza $\sqrt{2}$.

Egy algebrai–geometriai segédtétel. A $p^2 + q^2 + r^2$ összegre vonatkozó állításunkat az alábbi lemma segítségével bizonyítjuk majd:

Lemma

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1; \qquad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1; \qquad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1;$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0; \qquad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0; \qquad a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0$$

esetén

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1; \qquad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1; \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

A lemma bizonyítása. Szimmetria okán elég annyit megmutatni, hogy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Tekintve $j = 1, 2, 3$ esetén az (a_j, b_j, c_j) vektorokat, ezeket éppen mint egy egységnyi élű kocka egyik csúcsából (ami az origó) kiinduló 3 élt azonosíthatjuk. Az első három feltétel-egyenlet azt jelenti, hogy az élek hossza egységnyi, az utolsó három feltétel-egyenlet pedig azt, hogy az origóból induló élek merőlegesek egymásra.

A z-tengely körül forgatással elérjük, hogy $b_1 = 0$ legyen. A forgatás közben a lemma feltételei közt szereplő hat egyenlet végig fennáll; tehát az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $b_1 = 0$. A kockának az origóra való tükrözése is fenntartja a felírt feltétel-egyenleteket. Sem a forgatás, sem a tükrözés nem változtatta meg $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ értékét. Tehát feltehetjük azt is, hogy $c_1 \geq 0$. Ezért az első feltétel-egyenletből megkapjuk, hogy $c_1 = \sqrt{1 - a_1^2}$. Ha $c_1 = 0$, akkor hamar kinyerjük, hogy $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$, és így készen leszünk, hiszen $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$. A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $c_1 > 0$. Tekintetbe véve a negyedik és ötödik feltétel-egyenleteket is, ezeket kapjuk: $c_2 = -a_1 a_2 / c_1$, $c_3 = -a_1 a_3 / c_1$. A lemma feltételei közt szereplő második és a harmadik egyenlet okán

$$b_2^2 = 1 - a_2^2 - \left(\frac{-a_1 a_2}{c_1} \right)^2 = 1 - \frac{a_2^2}{c_1^2}; \quad b_3^2 = 1 - a_3^2 - \left(\frac{-a_1 a_3}{c_1} \right)^2 = 1 - \frac{a_3^2}{c_1^2}$$

Ha figyelembe vesszük a lemma feltételeiből a hatodik egyenletet is, ezt kapjuk:

$$\left(1 - \frac{a_2^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{a_3^2}{c_1^2} \right) - \left(a_2 a_3 + \frac{a_1^2 a_2 a_3}{c_1^2} \right)^2 = 0$$

Egyszerűsítés és c_1^2-tel való felszorzás után készen is leszünk: $a_1^2+a_2^2+a_3^2-1=0$. [$\times$]

A téglatestre vonatkozó állítás bizonyítása. A tartalmi összefoglalóban említett téglatestnek az egy csúcsból induló éleinek hossza nyilván p, q, r, és a téglatest test átlójának hossza $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$. Ha úgy vesszük fel az xyz-koordinátarendszert, hogy a z-tengely a nap irányába mutat, akkor — mivel a nap végtelen távolinak és egyetlen pontnak tekinthető — az árnyék az xy-síkon képződik úgy, hogy minden pont z-koordinátája kinullázódik. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a kocka egyik csúcsának az árnyéka éppen az xy-sík origója (azaz a kiszemelt kocka-csúcs a z-tengelyen van), és azt is feltehetjük, hogy a kocka ezen csúcsából a csomszédos csúcsokba mutató vektorok: (a_j, b_j, c_j), $j=1,2,3$. Ekkor a lemma feltételei fennállnak, és azt is feltehetjük, hogy a

p, q, r számok sorrendje olyan, hogy $p^2 = a_1^2 + b_1^2$, $q^2 = a_2^2 + b_2^2$, $r^2 = a_3^2 + b_3^2$. Mindazonáltal a lemma állításából következően

$$p^2 + q^2 + r^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 2$$

A téglatest testátló-hossza tehát $\sqrt{2}$, és ez megegyezik az egységkocka lap átló-hosszával. [×]

Megjegyzések. Ha a kiindulási kocka nem általános helyzetű, akkor az árnyéka hatszög helyett téglalap (esetleg négyzet) is lehet. A p, q, r számok ilyen esetekben is értelmezhetők a téglalapot degenerált hatszögnek tekintve, és továbbra is ugyanaz marad a négyzetösszegük.